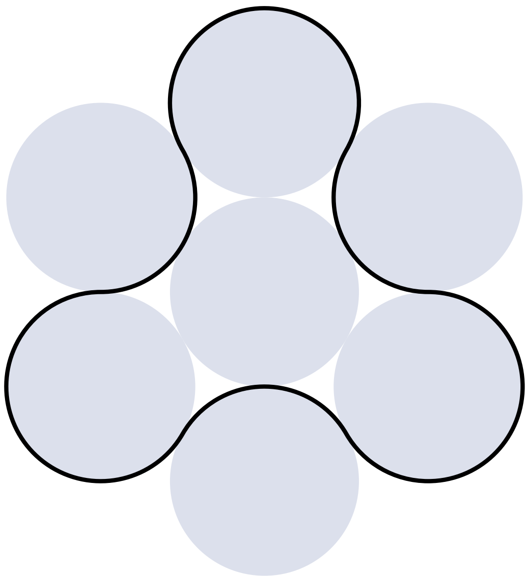
| Teamnummer | Name und Vorname eines Teammitglieds |
| --- | --- |
| | |

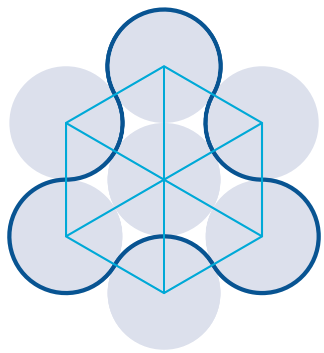
## Aufgabe S 1 (4 Punkte)

Die sieben Kreise der Rosette haben alle einen Radius von zehn Zentimetern.

Wie lang ist die schwarze Linie?



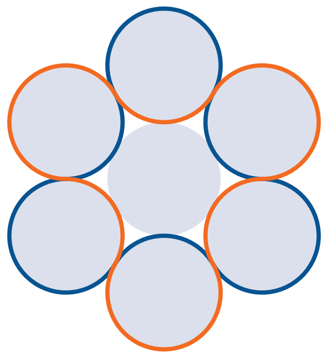
**Lösungsweg 1:**



Legt man über die Figur ein Raster aus gleichseitigen Dreiecken, deren Ecken mit den Kreismittelpunkten zusammenfallen, so sieht man, dass die kurzen Bögen der Rosettenlinie jeweils einen Sektor von $2 \cdot 60° = 120°$ eines Kreises begrenzen, ihre Länge also ein Drittel eines Kreisumfangs ist. Komplementär sind die langen Bögen zwei Drittel eines Kreisumfangs.

Insgesamt besteht die Rosettenlinie also aus drei vollen Kreisumfängen und hat somit die Länge $6\pi \cdot 10$ cm oder ungefähr 188,5 cm.

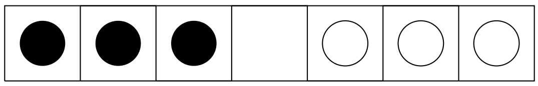
**Lösungsweg 2:**



Zeichnet man die Kreislinienanteile, die nicht zur Rosette gehören, orangefarben, erhält man eine zweite gleich lange orangefarbene Rosette. Die Länge der Rosettenlinie ist also die Hälfte der Summe aller sechs Kreisumfänge, d. h. $6\pi \cdot 10$ cm oder ungefähr 188,5 cm.

| Teamnummer | Name und Vorname eines Teammitglieds |
|---|---|
| | |

## Aufgabe S 2 (4 Punkte)



Auf einem Spielbrett, das nur eine Reihe mit 7 Feldern hat, liegen 3 schwarze Spielsteine (links) und 3 weiße Spielsteine (rechts) wie abgebildet.

Die schwarzen und die weißen Steine sollen nun durch bestimmte Züge die Plätze tauschen. Dabei sind nur 2 Arten von Zügen erlaubt:

1. das Verschieben eines Steins auf ein direkt benachbartes freies Feld,

2. das Springen über einen einzelnen **andersfarbigen** Stein auf das direkt dahinter liegende freie Feld.

Außerdem dürfen die schwarzen Steine nur nach rechts und die weißen Steine nur nach links ziehen oder springen.

Wieviele Züge werden dabei benötigt?

(Die Züge müssen nicht angegeben werden.
Es darf verwendet werden, dass die Aufgabe lösbar ist.)

### Lösung

Die einzelnen schwarzen Steine können ihre Reihenfolge durch keinen Zug ändern. Das gleiche gilt für die weißen Steine. Alle schwarzen Steine müssen daher genau 4 Felder nach rechts rücken und alle weißen Steine 4 Felder nach links.

Dies erfordert $6 \cdot 4 = 24$ Einzelverschiebungen, falls nicht gesprungen wird.

Damit die schwarzen und weißen Steine aneinander vorbeiziehen können, muss jeder der 3 schwarzen Steine mit jedem der 3 weißen Steine die relative Position tauschen, indem entweder der schwarze über den weißen Stein springt, oder von ihm übersprungen wird.

Dies sind genau 9 Sprünge und bei jedem Sprung kommt ein Stein seinem Ziel um 2 Felder statt nur einem Feld näher.
Es werden also nur $24 - 9 = 15$ Züge benötigt.

**Alternativ** kann die Lösung auch durch Ausprobieren gefunden werden. Das ist gar nicht so einfach, denn abgesehen vom ersten Zug gibt es immer nur einen „guten“ Zug; alle anderen führen zu Stellungen, in denen kein erlaubter Zug mehr möglich ist.
Die richtige Strategie ist die folgende:

Wenn eine Farbe am Zug ist, macht sie so viele Züge wie möglich hintereinander, mit der einzigen Einschränkung, dass zwar beliebig viele Sprünge ausgeführt werden dürfen, aber höchstens einmal verschoben wird.

Danach ist die andere Farbe an der Reihe, usw.

Nach 15 Zügen ist die Endposition erreicht.

| Teamnummer | Name und Vorname eines Teammitglieds |
|---|---|
| | |

---

## Aufgabe S 3 (4 Punkte)

Wie lautet die Einerstelle der Zahl

$$Z = 1! + 2! + 3! + \ldots + 2025!\ ?$$

Dabei bedeutet $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$ das Produkt aller Zahlen von 1 bis $n$.

## Lösung

Ab $n = 5$ enthält $n!$ immer die Faktoren 2 und 5, ist also durch 10 teilbar und endet auf 0. Die letzte Ziffer von $Z$ ist daher die gleiche wie die von

$$1! + 2! + 3! + 4! = 1 + 2 + 6 + 24 = 33.$$

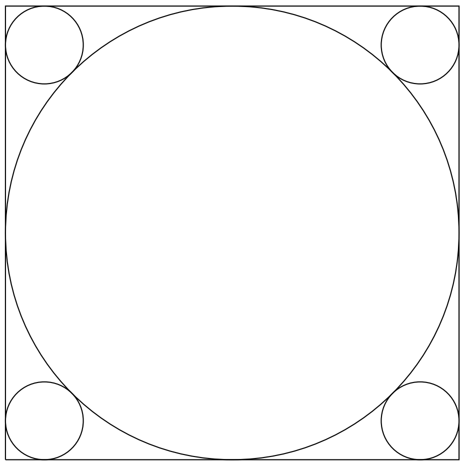
Die Einerstelle von $Z$ lautet also 3.

| Teamnummer | Name und Vorname eines Teammitglieds |
| --- | --- |
| | |

---

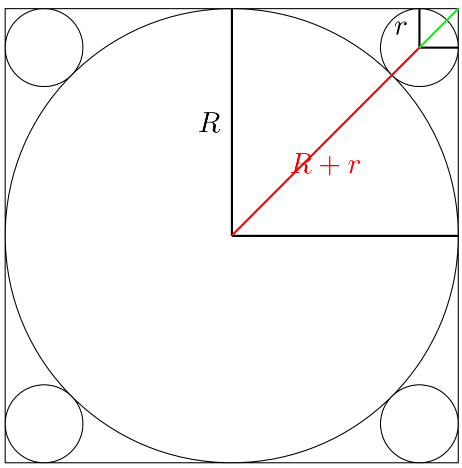
## Aufgabe S 4 (4 Punkte)

In ein Quadrat mit Seitenlänge 2 ist ein großer Kreis einbeschrieben und in die 4 Ecken jeweils ein kleinerer Kreis, der den großen Kreis und das Quadrat berührt.



Wie groß ist der Radius der kleinen Kreise?

### Lösung



Ist $R = 1$ der Radius des großen Kreises und $r$ der Radius des kleinen Kreises, hat die rote Strecke in der Skizze die Länge $R + r$, die grüne Strecke in der Skizze die Länge $\sqrt{2}r$ und beide Strecken zusammen die Länge $\sqrt{2}R$.
Es gilt also

$$\begin{aligned} \sqrt{2}R &= R + r + r\sqrt{2} \\ \Rightarrow r &= \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}R = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = 3 - 2\sqrt{2}\ . \end{aligned}$$

**Alternative Lösung:** Die rote Strecke ist die Hypotenuse in einem rechtwinklig-gleichschenkligen Dreieck, dessen Katheten die Länge $R - r$ haben. Also ist

$$(R + r)^2 = 2(R - r)^2,$$

was mit $R = 1$ auf die quadratische Gleichung

$$r^2 - 6r + 1 = 0$$

führt. Sie hat die Lösungen $r_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9-1}$, und weil $r < 1$ ist, ist die gesuchte Lösung

$$r = 3 - 2\sqrt{2}.$$

| Teamnummer | Name und Vorname eines Teammitglieds |
| --- | --- |
| | |

---

# Aufgabe S 5 (4 Punkte)

Wie viele fünfstellige Zahlen gibt es, bei denen mindestens zwei benachbarte Ziffern übereinstimmen?

(Es genügt die Angabe des Lösungsterms.)

## Lösung

Insgesamt gibt es $9 \cdot 10^4 = 90.000$ fünfstellige Zahlen *abcde*.

Denn die erste Ziffer $a$ darf nicht 0 sein, für $a$ gibt es also nur 9 mögliche Ziffern, während für $b$, $c$, $d$ und $e$ jeweils alle 10 Ziffern zur Verfügung stehen.

Von der Gesamtzahl $9 \cdot 10^4$ ist die Anzahl derjenigen fünfstelligen Zahlen abzuziehen, bei denen keine zwei aufeinander folgenden Ziffern übereinstimmen.

Davon gibt es $9^5$.

Denn für $a$ gibt es die 9 Möglichkeiten $1, 2, \ldots, 9$; zu jeder Wahl von $a$ gibt es 9 Möglichkeiten für $b$, nämlich die 9 von $a$ verschiedenen Ziffern. Genauso kann $c$ eine der 9 Ziffern $\neq b$ sein, $d$ eine der 9 Ziffern $\neq c$ und $e$ eine der 9 Ziffern $\neq d$.

Die gesuchte Anzahl ist also

$$9 \cdot 10^4 - 9^5 = 9 \cdot (10^4 - 9^4) = 9 \cdot (10.000 - 6461) = 30.951.$$

| Teamnummer | Name und Vorname eines Teammitglieds |
|---|---|
| | |

---

## Aufgabe S 6 (4 Punkte)

Max wird in diesem Jahr 27 Jahre alt, sein Alter teilt also 2025.

In welchem Jahr erreicht er das nächste Mal ein Lebensalter, das die Jahreszahl teilt?

### Lösung

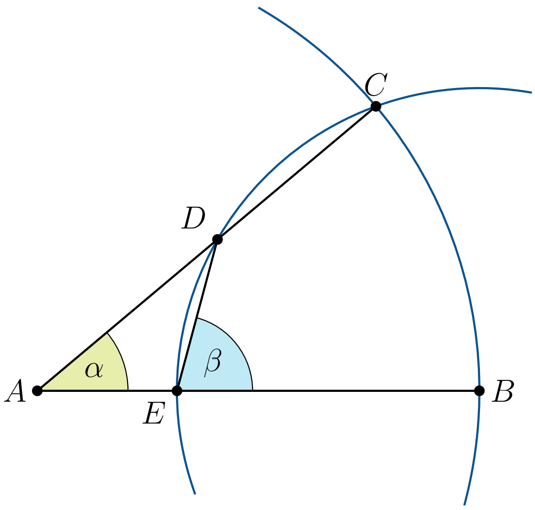
Im Jahr 2035.

Erklärung: Da Max in diesem Jahr 27 Jahre alt wird, wurde er im Jahr 1998 geboren.
Das Lebensalter $n$ erreicht er also im Jahr $1998 + n$.
Die Jahreszahl $1998 + n$ ist genau dann durch das Lebensalter $n$ teilbar, wenn $n$ ein Teiler von $1998 = 2 \cdot 3^3 \cdot 37$ ist.
Der nächstgrößere Teiler von 1998 nach $27 = 3^3$ ist offenbar 37.

| Teamnummer | Name und Vorname eines Teammitglieds |
| --- | --- |
| | |

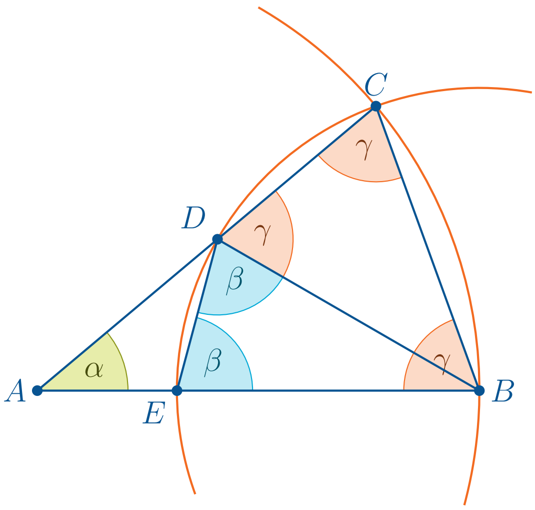
## Aufgabe S 7 (4 Punkte)

In der Skizze liegen $B$ und $C$ auf einem Kreis um $A$. Außerdem liegen $C$, $D$, und $E$ auf einem Kreis um $B$.




Wie groß ist der Winkel $\alpha$, wenn $\beta = 75°$ ist?

## Lösung




Die Dreiecke $\triangle CAB$, $\triangle DBC$ und $\triangle EBD$ sind gleichschenklig.

Daher ist der Winkel $\angle EDB = \angle BED = \beta = 75°$, und die drei Winkel $\angle BDC = \angle DCB = \angle CBA$ sind gleich; wir bezeichnen diesen Winkel mit $\gamma$.

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\angle ADE &= 180° - 75° - \gamma \\
\angle DEA &= 180° - 75° \\
\alpha &= 180° - \angle ADE - \angle DEA = \gamma - 30° \\
&= 180° - \angle ACB - \angle CBA = 180° - 2\gamma \\
\Rightarrow \gamma &= 70° \\
\Rightarrow \alpha &= 40°
\end{aligned}$$

| Teamnummer | Name und Vorname eines Teammitglieds |
|---|---|
| | |

---

## Aufgabe S 8 (4 Punkte)

Es sei gegeben:

$$1 + 2 \cdot \sqrt{1 + 2 \cdot \sqrt{1 + 2 \cdot \sqrt{1 + \cdots}}} = x$$

Bestimmen Sie $x$.

### Lösung

Der Term unter der Wurzel ist wiederum $x$. Daher lässt sich die gegebene Gleichung auch in der Form

$$1 + 2 \cdot \sqrt{x} = x$$

schreiben. Durch Isolieren der Wurzel und anschließendes Quadrieren wird daraus

$$4x = (x-1)^2 \qquad \text{bzw.}$$
$$x^2 - 6x + 1 = 0$$

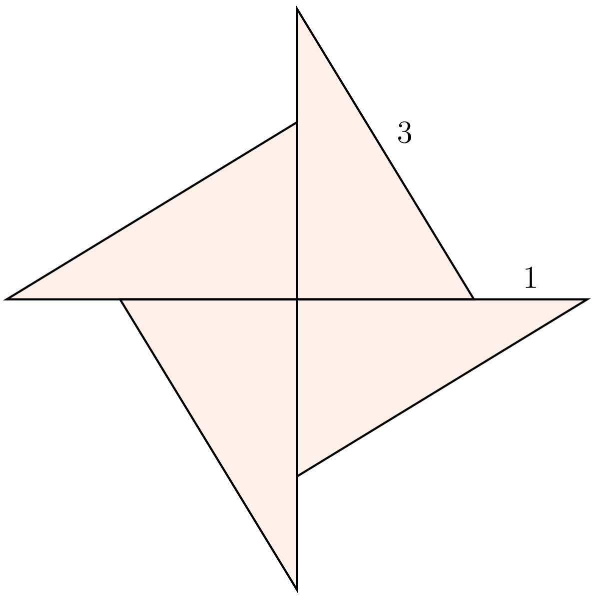
Die Lösungen dieser quadratischen Gleichung sind $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9-1}$, und weil $x > 1$ ist, ist die gesuchte Lösung

$$x = 3 + 2\sqrt{2}.$$

| Teamnummer | Name und Vorname eines Teammitglieds |
|---|---|
| | |

## Aufgabe S 9 (4 Punkte)

Ein Stern, dessen Seiten die Längen 1 und 3 haben, ist aus vier rechtwinkligen Dreiecken wie im Bild zusammengesetzt.

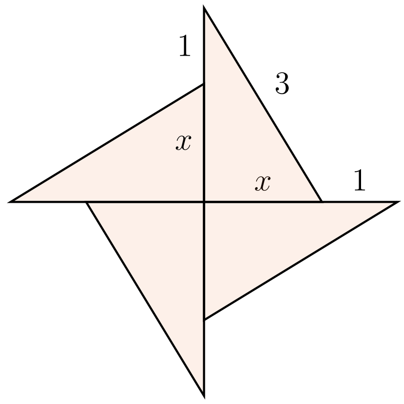



Wie groß ist die Fläche jedes dieser Dreiecke?

**Lösungsweg 1:**

Für die Fläche $A$ eines einzelnen Dreiecks gilt

$$A = \frac{1}{2} \cdot x(x+1) = \frac{1}{2} \cdot (x^2 + x)$$



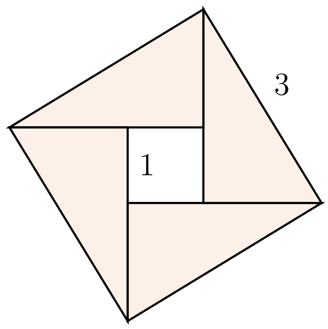

Nach Pythagoras gilt:

$$\begin{aligned} 3^2 &= x^2 + (x+1)^2 \\ 8 &= 2x^2 + 2x \\ 4 &= x^2 + x \end{aligned}$$

Also folgt

$$A = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$$

**Lösungsweg 2:**




$$A = \frac{1}{4}(3^2 - 1^2) = 2$$