

Tag der Mathematik 2025

Gruppenwettbewerb

Allgemeine Hinweise:

Die Bearbeitungszeit beträgt 45 Minuten.

Als Hilfsmittel dürfen nur Schreibzeug, Geodreieck und Zirkel benutzt werden.
Elektronische Geräte sind nicht zugelassen.

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

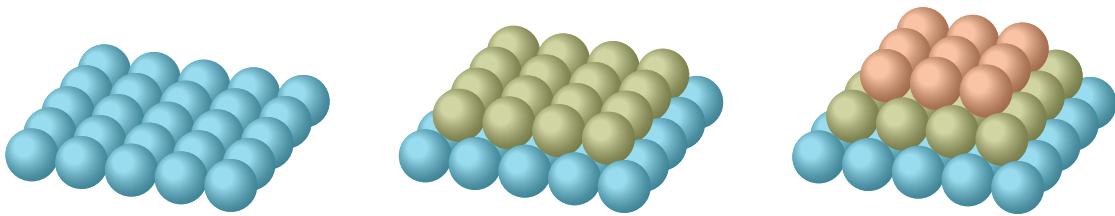
Die folgende Tabelle wird von den Korrektoren ausgefüllt.

Aufgabe	G 1	G 2	G 3	G 4	Summe
Mögliche Punktzahl	9	9	9	9	36
Erreichte Punktzahl					

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe G 1 (9 Punkte)

Kugeln werden auf dem Tisch zu einem quadratischen Muster ausgelegt. Eine zweite Schicht legt man versetzt darüber und verfährt analog für jede weitere Schicht.



Wenn das Startquadrat aus $n \times n$ Kugeln besteht, besteht die n -te Schicht aus einer Kugel und wir erhalten eine Pyramide.

Sei $Q(n)$ die Anzahl der Kugeln in solch einer Pyramide.

- a) Bestimmen Sie $Q(n)$ für $n = 1, 2, 3, 4$ und finden Sie eine Rekursionsformel für $Q(n)$.
(Hinweis: Eine Rekursionsformel gibt an, wie man $Q(n)$ aus $Q(n - 1)$ erhält.)
- b) Finden Sie Zahlen p, q, r , sodass für $n = 1, 2, 3, 4$ gilt:

$$Q(n) = pn^3 + qn^2 + rn.$$

- c) Tatsächlich gilt die in Aufgabenteil b) gefundene Formel für alle $n \in \mathbb{N}$.

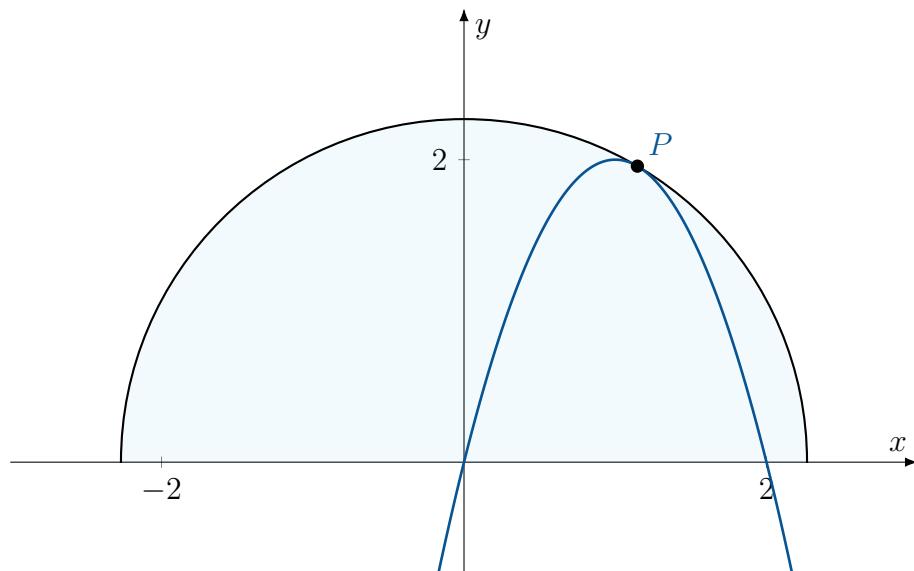
Zeigen Sie dazu: Wenn die Formel $Q(n)$ aus b) für eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ gilt, dann gilt auch $Q(n + 1)$ für den Nachfolger $n + 1$.

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe G 2 (9 Punkte)

Im Bild ist eine nach unten geöffnete Parabel mit den Nullstellen $x = 0$, $x = 2$ und dem Maximalwert $y_{\max} = 2$ dargestellt.

Sie berührt einen Halbkreis um den Ursprung oberhalb der x -Achse von innen in einem Punkt P .

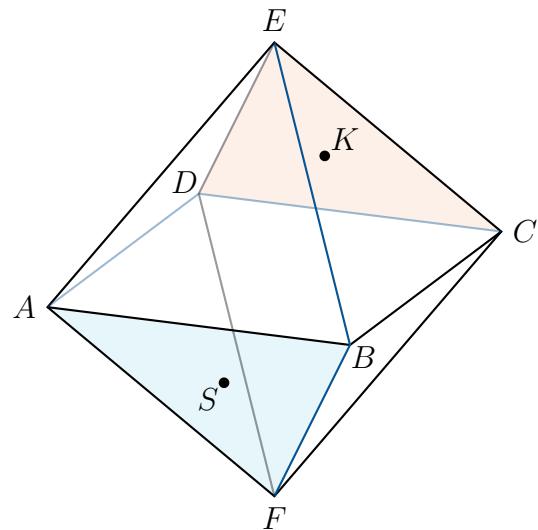


Berechnen Sie die x -Koordinate von P .

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe G 3 (9 Punkte)

Eine Spinne S sitzt außen auf einem durchsichtigen Oktaeder mit Kantenlänge 1, genau in der Mitte (Höhenschnittpunkt) der Dreiecksfläche $\triangle ABF$. Auf der gegenüberliegenden Dreiecksfläche $\triangle CDE$ (ebenfalls genau in der Mitte) entdeckt sie einen Käfer K als potentielle Beute.



Wie lang ist der kürzeste Weg von der Spinne zur Beute entlang der Oktaederoberfläche?

(*Hinweis:* Im gleichseitigen Dreieck sind die Höhen auch Seitenhalbierende und teilen sich im Verhältnis 2:1.)

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe G 4 (9 Punkte)

Für die vierstellige Zahl 6255 gilt: Addiert man zu dieser Zahl die Zahl, die man erhält, wenn man die Ziffern in umgekehrter Reihenfolge notiert, dann ist das Ergebnis durch 11 teilbar. Es gilt nämlich:

$$6255 + 5526 = 11781 = 11 \cdot 1071$$

- a) Zeigen Sie, dass dies für **jede** vierstellige Zahl Z gilt.
- b) Gilt die Aussage auch für **jede** fünfstellige Zahl? (mit Begründung)