Tag der Mathematik 2025

Gruppenwettbewerb

Allgemeine Hinweise:

Als Hilfsmittel dürfen nur Schreibzeug, Geodreieck und Zirkel benutzt werden.
Elektronische Geräte sind nicht zugelassen.

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

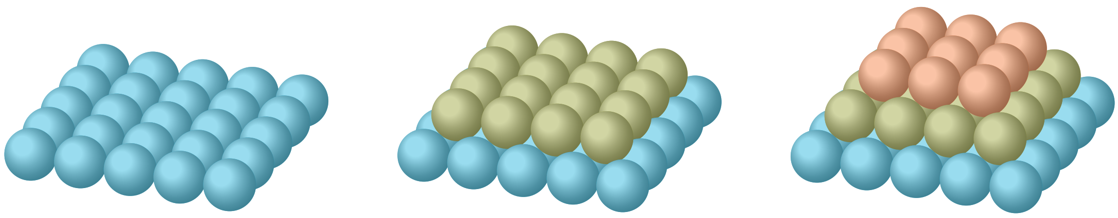
Die folgende Tabelle wird von den Korrektoren ausgefüllt.

Aufgabe	G 1	G 2	G 3	G 4	Summe
Mögliche Punktzahl	9	9	9	9	36
Erreichte Punktzahl					

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe G 1 (9 Punkte)

Kugeln werden auf dem Tisch zu einem quadratischen Muster ausgelegt. Eine zweite Schicht legt man versetzt darüber und verfährt analog für jede weitere Schicht.



Wenn das Startquadrat aus $n \times n$ Kugeln besteht, besteht die n-te Schicht aus einer Kugel und wir erhalten eine Pyramide.

Sei $Q(n)$ die Anzahl der Kugeln in solch einer Pyramide.

a) Bestimmen Sie $Q(n)$ für $n = 1, 2, 3, 4$ und finden Sie eine Rekursionsformel für $Q(n)$.

(*Hinweis*: Eine Rekursionsformel gibt an, wie man $Q(n)$ aus $Q(n-1)$ erhält.)

b) Finden Sie Zahlen p, q, r, sodass für $n = 1, 2, 3, 4$ gilt:

$$Q(n) = pn^3 + qn^2 + rn.$$

c) Tatsächlich gilt die in Aufgabenteil b) gefundene Formel für alle $n \in \mathbb{N}$.

Zeigen Sie dazu: Wenn die Formel $Q(n)$ aus b) für eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ gilt, dann gilt auch $Q(n+1)$ für den Nachfolger $n+1$.

Lösung

a) Es ist

$$\begin{aligned}
Q(1) &= 1^2 = 1 \\
Q(2) &= 1^2 + 2^2 = 5 \\
Q(3) &= 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14 \\
Q(4) &= Q(3) + 4^2 = 30.
\end{aligned}$$

Die Rekursionsformel lautet

$$Q(n) = Q(n-1) + n^2.$$

b) Nach a) erhält man ein lineares Gleichungssystem für die gesuchten Parameter:

$$\begin{aligned}
p + q + r &= 1 \qquad (1) \\
8p + 4q + 2r &= 5 \qquad (2) \\
27p + 9q + 3r &= 14 \qquad (3)
\end{aligned}$$

Zieht man das Doppelte von (1) von (2) ab und das Dreifache von (1) von (3), so erhält man

$$\begin{aligned}
6p + 2q &= 3 \\
24p + 6q &= 11.
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich sofort $6p = 2$, also

$$p = \frac{1}{3}, \quad q = \frac{1}{2}, \quad r = \frac{1}{6}.$$

Zur Überprüfung wird noch $Q(4)$ anhand dieser Werte für p, q, r berechnet:

$$Q(4) = \frac{4^3}{3} + \frac{4^2}{2} + \frac{4}{6} = \frac{64}{3} + 8 + \frac{2}{3} = 30.$$

c) Ist die Formel aus b) für n richtig, so gilt wegen der Rekursionsformel

$$\begin{aligned}
Q(n+1) &= Q(n) + (n+1)^2 \\
&= \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n + n^2 + 2n + 1 \\
&= \frac{1}{3}n^3 + n^2 + n + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}n^2 + n + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}n + \frac{1}{6} \\
&= \frac{1}{3}(n+1)^3 + \frac{1}{2}(n+1)^2 + \frac{1}{6}(n+1),
\end{aligned}$$

das heißt, die Formel ist auch für $n+1$ richtig.

Alternativlösung für b) und c):

Man bestimmt die Parameter für die Formel in b) durch Koeffizientenvergleich aus der Rekursionsformel in a):

$$\begin{aligned}
Q(n) = pn^3 + qn^2 + rn &\overset{!}{=} n^2 + Q(n-1) \\
&= n^2 + p(n-1)^3 + q(n-1)^2 + r(n-1) \\
&= n^2 + pn^3 - 3pn^2 + 3pn - p + qn^2 - 2qn + q + rn - r \\
&= pn^3 + (1 - 3p + q)n^2 + (3p - 2q + r)n + (-p + q - r)
\end{aligned}$$

Damit die Formel für alle n gilt, müssen die Koeffizienten bei n^3, n^2, n^1 und n^0 übereinstimmen:

$$\begin{aligned}
p &= p && && (n^3) \\
q &= (1 - 3p + q) && \Rightarrow p = \tfrac{1}{3} && (n^2) \\
r &= (3p - 2q + r) && \Rightarrow q = \tfrac{3}{2}p = \tfrac{1}{2} && (n^1) \\
0 &= (-p + q - r) && \Rightarrow r = q - p = \tfrac{1}{6} && (n^0)
\end{aligned}$$

Also erfüllt

$$Q(n) = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$

die Rekursionsformel.

Weiter gilt für $n = 1$:

$$Q(1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = 1.$$

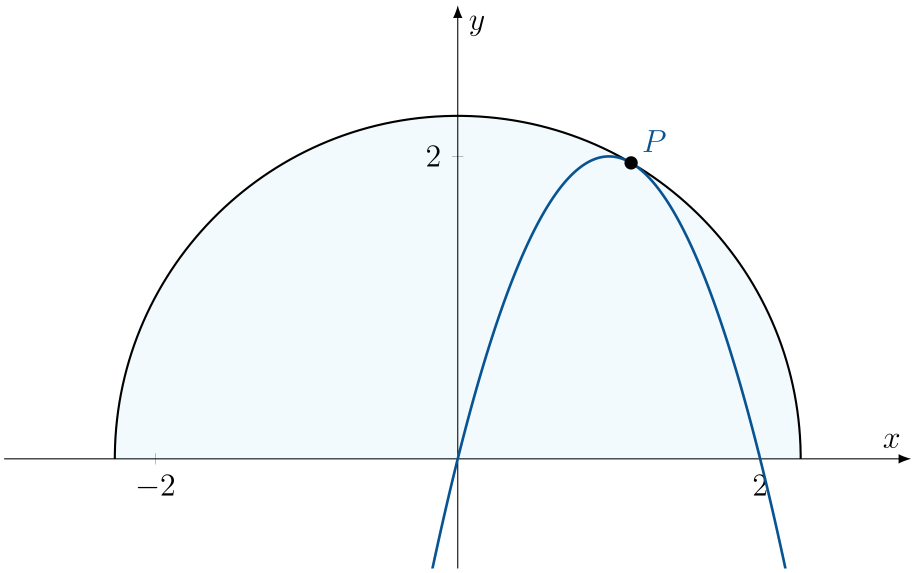
Damit gilt die Formel für alle n.

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe G 2 (9 Punkte)

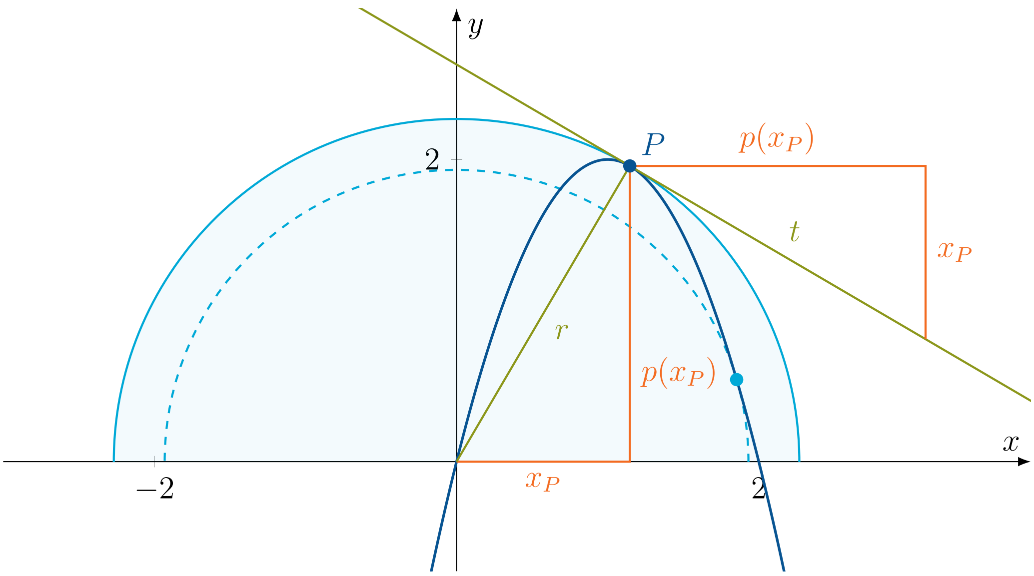
Im Bild ist eine nach unten geöffnete Parabel mit den Nullstellen $x = 0$, $x = 2$ und dem Maximalwert $y_{\text{max}} = 2$ dargestellt.

Sie berührt einen Halbkreis um den Ursprung oberhalb der x-Achse von innen in einem Punkt P.



Berechnen Sie die x-Koordinate von P.

Lösung



Die Parabel mit den Nullstellen $x = 0$ und $x = 2$ und Scheitelpunkt bei $(x, y) = (1, 2)$ hat die Gleichung

$$p(x) = 2 - 2(x-1)^2 = -2x^2 + 4x.$$

Es gibt 2 berührende Kreise um den Ursprung. Ein Kreis (gestrichelt) berührt von innen, der gesuchte Kreis berührt von außen.

Im Berührpunkt P ist die Tangente t an den Graphen der Parabel auch Tangente an den Kreis und steht senkrecht auf dem Radius.
Daher gilt für die gesuchte Koordinate $x = x_P$:

$$\begin{aligned}
p'(x) &= -4x + 4 \\
&\overset{!}{=} -\frac{x}{p(x)} \\
&= -\frac{x}{-2x^2+4x} = \frac{1}{2x-4} \\
\Rightarrow 1 &= (-4x+4)(2x-4) = -8x^2 + 24x - 16 \\
\Rightarrow 0 &= x^2 - 3x + 2 + \frac{1}{8} = x^2 - 3x + \frac{17}{8} \\
x_{1,2} &= \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{17}{8}} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Relevant ist die kleinere Lösung

$$x_P = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} \quad (\approx 1,146446609).$$

(Die andere Lösung führt auf den gestrichelten Kreis.)

(**Bemerkung:** Die Aufgabe entstammt der Anwendung, Tennishallen zu konzipieren. Eine Tennishalle muss eine Mindesthöhe h besitzen. Praktisch genügt es, Hallen so zu bauen, dass Bälle, die nicht höher als h fliegen, nicht an der Decke anstoßen, es sei denn sie wären sowieso ins Aus gegangen. Daher genügt es, wenn Parabeln mit Maximalhöhe h, die von einem Feld ins andere gehen, nicht anstoßen. Kritisch ist dabei ein Lob vom Netz auf die gegnerische Grundlinie.)

Alternativlösung:

Der Berührpunkt ist der Punkt der Parabel oberhalb der x-Achse mit dem größten Abstand A zum Ursprung, seine x-Koordinate also ein lokales Maximum von

$$f(x) := A^2 = x^2 + p(x)^2 = x^2 + (-2x^2 + 4x)^2 = 4x^4 - 16x^3 + 17x^2.$$

Ein lokales Maximum finden wir als Nullstelle der Ableitung:

$$\begin{aligned} &f'(x) = 16x^3 - 48x^2 + 34x \stackrel{!}{=} 0 \\ &\Rightarrow x = 0 \text{ oder } 16x^2 - 48x + 34 = 0 \\ &\Rightarrow 0 = x^2 - 3x + \frac{17}{8} \end{aligned}$$

Das ist die von oben bekannte quadratische Gleichung mit den beiden Lösungen

$$x_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Um zu sehen, dass die kleinere der beiden Lösungen gebraucht wird, dass also gilt

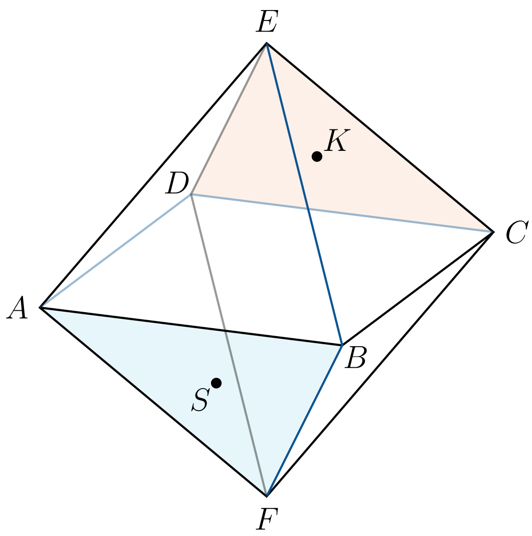
$$x_P = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4},$$

kann man wie oben geometrisch argumentieren. Oder man berechnet $f''(x_1) > 0$ und $f''(x_2) < 0$, woraus folgt, dass x_1 ein Minimum und x_2 ein Maximum der Funktion f ist.

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe G 3 (9 Punkte)

Eine Spinne S sitzt außen auf einem durchsichtigen Oktaeder mit Kantenlänge 1, genau in der Mitte (Höhenschnittpunkt) der Dreiecksfläche $\triangle ABF$. Auf der gegenüberliegenden Dreiecksfläche $\triangle CDE$ (ebenfalls genau in der Mitte) entdeckt sie einen Käfer K als potentielle Beute.

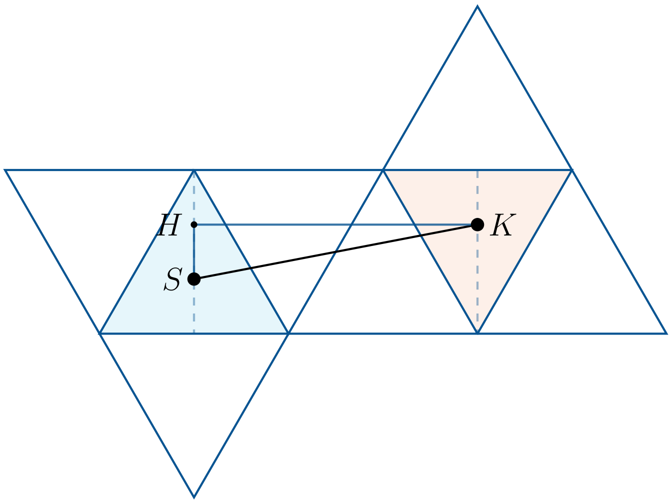


Wie lang ist der kürzeste Weg von der Spinne zur Beute entlang der Oktaederoberfläche?

(*Hinweis:* Im gleichseitigen Dreieck sind die Höhen auch Seitenhalbierende und teilen sich im Verhältnis 2:1.)

Lösung

Man schneidet die Oberfläche des Oktaeders entlang von Kanten so auf, dass man sie auf eine Ebene ausbreiten kann. Dadurch entsteht ein Oktaedernetz wie zum Beispiel das in der Abbildung.



Der kürzeste Weg von der Spinne zum Käfer ist die gerade Verbindung zwischen den Dreiecksmittelpunkten S und K in einem geeigneten Oktaedernetz. Das abgebildete Netz ist ein solches, denn die gerade Verbindung verläuft ganz innerhalb des Netzes, und es kann auch durch anderes Aufschneiden keine kürzere gerade Verbindung entstehen, weil S und K auf gegenüberliegenden Dreiecken sind und deshalb mindestens zwei andere Dreiecke durchquert werden müssen.

Die Länge des Weges berechnen wir nun mit Pythagoras aus dem rechtwinkligen Dreieck ΔSKH. Aus der Abbildung erkennt man, dass der Abstand von H zu K gerade das 1,5-fache der Dreiecksseitenlänge ist.

Zur Ermittlung des Abstands von H zu S benutzen wir den Hinweis. Danach teilen sowohl S als auch K die Dreieckshöhe im Verhältnis 2:1. Das gilt dann auch für H, und deshalb ist der Abstand von H und S gerade $\frac{1}{3}$ der Höhe h. Diese beträgt im gleichseitigen Dreieck mit Seitenlänge l

$$h = \sqrt{l^2 - \frac{l^2}{4}} = l \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Für die Weglänge w der Spinne erhält man wegen $l = 1$:

$$\begin{aligned} w^2 &= \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} + \frac{1}{12} = \frac{7}{3} \\ w &= \sqrt{\frac{7}{3}} \end{aligned}$$

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe G 4 (9 Punkte)

Für die vierstellige Zahl 6255 gilt: Addiert man zu dieser Zahl die Zahl, die man erhält, wenn man die Ziffern in umgekehrter Reihenfolge notiert, dann ist das Ergebnis durch 11 teilbar. Es gilt nämlich:

$$6255 + 5526 = 11781 = 11 \cdot 1071$$

a) Zeigen Sie, dass dies für **jede** vierstellige Zahl Z gilt.

b) Gilt die Aussage auch für **jede** fünfstellige Zahl? (mit Begründung)

Lösung

a) Sei $Z = abcd$ die Zifferndarstellung der vierstelligen Zahl Z. Es ist also

$$Z = 1000a + 100b + 10c + d.$$

Die Zahl in umgekehrter Ziffernreihenfolge ist

$$Z' = 1000d + 100c + 10b + a.$$

Die Summe ist also

$$\begin{aligned} Z + Z' =& 1000a + 100b + 10c + d + 1000d + 100c + 10b + a \\ &= 1001(a + d) + 110(b + c) \end{aligned}$$

Sowohl $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$ als auch $110 = 10 \cdot 11$ ist durch 11 teilbar, also ist auch $Z + Z'$ durch 11 teilbar.

b) Für fünfstellige Zahlen gilt die Ausssage im Allgemeinen nicht.
Ein Gegenbeispiel ist $Z = 11111$: Es ist $Z + Z' = 22222 = 2020 \cdot 11 + 2$.