Tag der Mathematik 2025

Einzelwettbewerb

Allgemeine Hinweise:

Die Bearbeitungszeit beträgt 60 Minuten.

Als Hilfsmittel dürfen nur Schreibzeug, Geodreieck und Zirkel benutzt werden. Elektronische Geräte sind nicht zugelassen.

Teamnummer	Name und Vorname

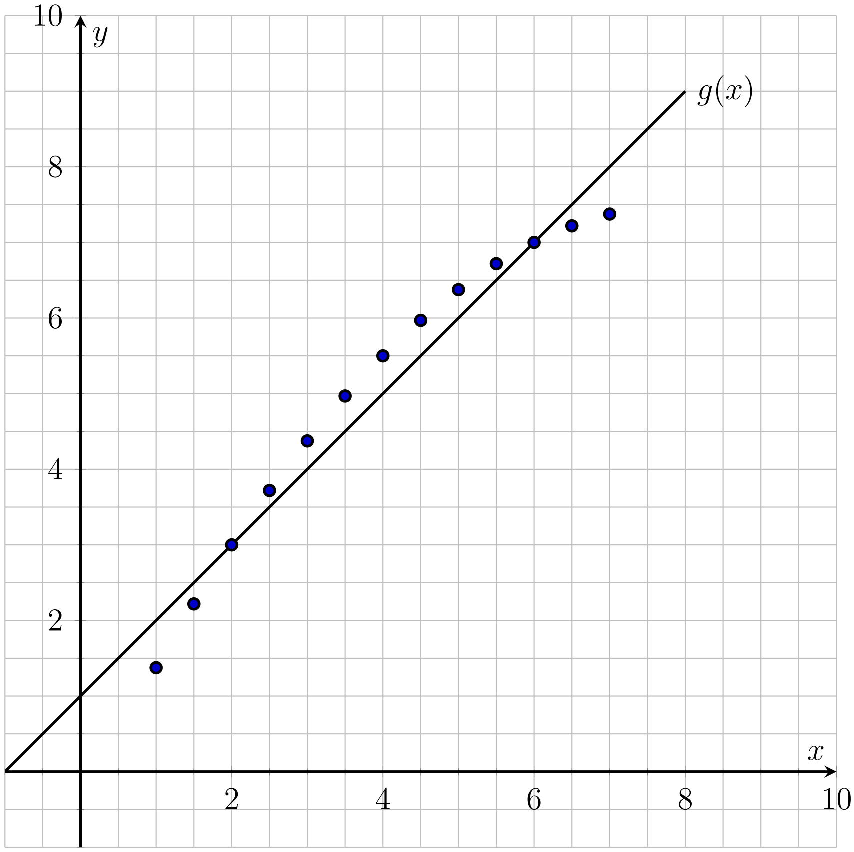
Die folgende Tabelle wird von den Korrektoren ausgefüllt.

Aufgabe	E 1	E 2	E 3	E 4	Summe
Mögliche Punktzahl	8	8	8	8	32
Erreichte Punktzahl					

Teamnummer	Name und Vorname

Aufgabe E 1 (8 Punkte)

Die Messdaten (Punkte) wurden durch eine lineare Modellfunktion $g(x)$ approximiert.

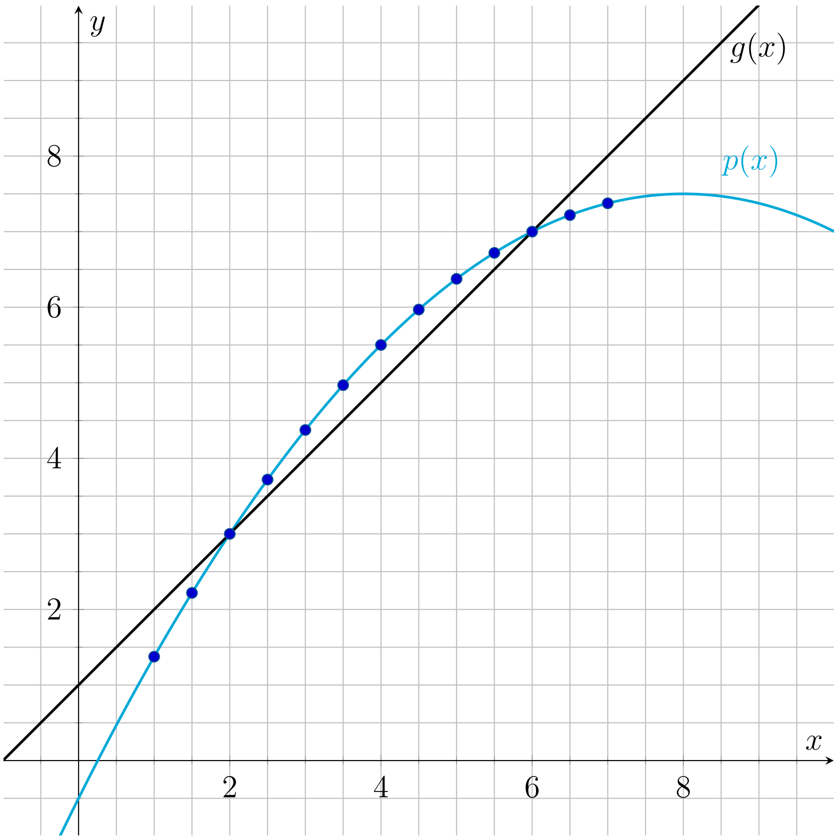


Zur Verbesserung des Modells soll nun eine Parabel $p(x)$ genauer an die Daten angepasst werden.

Geben Sie eine solche Parabel an.

(Hinweis: Nutzen Sie eine Darstellung von p, bei der die Parameter aus der Abbildung möglichst gut abgelesen werden können.)

Lösung



Für die Parabel eignet sich die Darstellung

$$p(x) = g(x) + q(x).$$

Denn dann ist $q(x) = p(x) - g(x)$ ebenfalls eine Parabel, und aus der Abbildung erkennt man, dass die Nullstellen von $q(x)$ bei $x_1 \approx 2$ und $x_2 \approx 6$ liegen. $q(x)$ hat also eine Gleichung der Form

$$q(x) = b \cdot (x-2)(x-6).$$

Zur Bestimmung von b lesen wir an der Stelle $x = 4$ den Wert $q(4) \approx \frac{1}{2}$ ab. Es ist also $b(4-2)(4-6) = -4b \approx \frac{1}{2}$, und wir verwenden den Wert $b = -\frac{1}{8}$.
Die Gerade g hat die Steigung 1 und den y-Achsenabschnitt 1, also die Gleichung

$$g(x) = x + 1.$$

Damit erhalten wir für die Parabel p die Gleichung

$$p(x) = g(x) + q(x) = x + 1 - \frac{1}{8}(x-2)(x-6) = -\frac{1}{8}x^2 + 2x - \frac{1}{2}.$$

Alternativ kann man die Aufgabe auch lösen, indem man die Parabel (ohne Verwendung des Hinweises) in der Form $p(x) = ax^2 + bx + c$ ansetzt und an drei Stellen die Werte abliest (etwa bei $x = 2$, $x = 4$ und $x = 6$). Man erhält drei lineare Gleichungen für die drei Parameter a, b und c und löst dieses lineare Gleichungssystem.

Teamnummer	Name und Vorname

Aufgabe E 2 (8 Punkte)

Anton und Berta werfen eine Münze, die mit gleicher Wahrscheinlichkeit Kopf oder Zahl zeigt. Anton setzt auf Kopf, Berta auf Zahl.
Es gewinnt, wessen Symbol zuerst 10 mal geworfen wird.

a) Nach 14 Würfen steht es 9:5 für Berta, das heißt, es wurde schon 9 mal Zahl, aber erst 5 mal Kopf geworfen.
Wie groß ist die Chance, dass Berta am Ende gewinnt?

b) Wie groß ist die Chance für Berta, wenn es nach 12 Würfen 8:4 für Berta steht?

Lösung

a) Anton kann nur gewinnen, wenn in den nächsten 5 Würfen jedesmal Kopf kommt.
Die Wahrscheinlichkeit dafür beträgt $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$.
Die Gewinnchance für Berta ist also

$$1 - \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 1 - \frac{1}{32} = \frac{31}{32} = 0,96875\ .$$

b) Anton gewinnt nur, wenn die nächsten 6 Würfe allesamt Kopf zeigen, oder wenn genau einer der nächsten 6 Würfe Zahl zeigt, alle anderen Kopf und auch der siebte Wurf noch einmal Kopf zeigt.
Die erste Möglichkeit tritt mit Wahrscheinlichkeit $\left(\frac{1}{2}\right)^6$ ein, für die zweite Möglichkeit gibt es 6 Wurfreihenfolgen (je nachdem, beim wievielten Wurf Zahl kommt), und jede dieser Kommbinationen tritt mit Wahrscheinlichkeit $\left(\frac{1}{2}\right)^7$ ein. Die Gewinnchance für Anton ist also

$$\left(\frac{1}{2}\right)^6 + 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{1}{64} + \frac{3}{64} = \frac{1}{16}.$$

Die Siegchance für Berta ist also

$$1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16} = 0,9375.$$

Teamnummer	Name und Vorname

Aufgabe E 3 (8 Punkte)

Achilles befestigt das linke Ende eines Gummibandes an einer Wand. Das rechte Ende behält er in der Hand und spannt das Band auf eine Länge von 3 Metern.

Er beobachtet eine Ameise, die am linken Bandende startend mit einer Geschwindigkeit von einem Meter pro Minute auf ihn zu krabbelt.

Nach jeder Minute tritt Achilles einen Meter zurück, wodurch das Band schlagartig um jeweils einen Meter gleichmäßig verlängert wird.

Wie lange (in Minuten und Sekunden) braucht die Ameise, bis sie Achilles erreicht?

Lösung

Bei der Dehnung des Bandes ändert sich das Verhältnis der von der Ameise schon zurückgelegten Strecke zur jeweiligen Bandlänge nicht.
Am Ende der ersten Minute hat die Ameise einen Meter zurückgelegt; das ist ein Drittel der Bandlänge.
In der zweiten Minute legt die Ameise wieder einen Meter zurück; da das Band jetzt aber 4 Meter lang ist, ist das nur ein Viertel der neuen Bandlänge. Entsprechend schafft sie in der dritten Minute nur noch ein Fünftel und in der vierten Minute ein Sechstel der jeweiligen Bandlänge.
Zu Beginn der fünften Minute hat die Ameise also

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{19}{20}$$

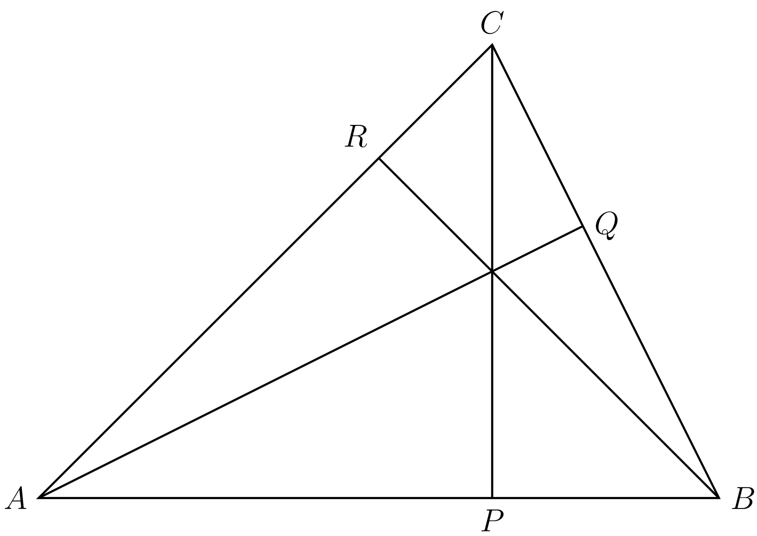
des dann 7 Meter langen Bandes zurückgelegt. Sie ist damit nur noch $\frac{1}{20}\cdot 7$ Meter von Achilles entfernt und erreicht ihn also vor der nächsten Dehnung des Bandes.

Für die letzten $\frac{7}{20}$ Meter bis zu Achilles benötigt die Ameise $\frac{7}{20}$ Minuten, sie erreicht ihn also nach 4 Minuten und 21 Sekunden.

Teamnummer	Name und Vorname

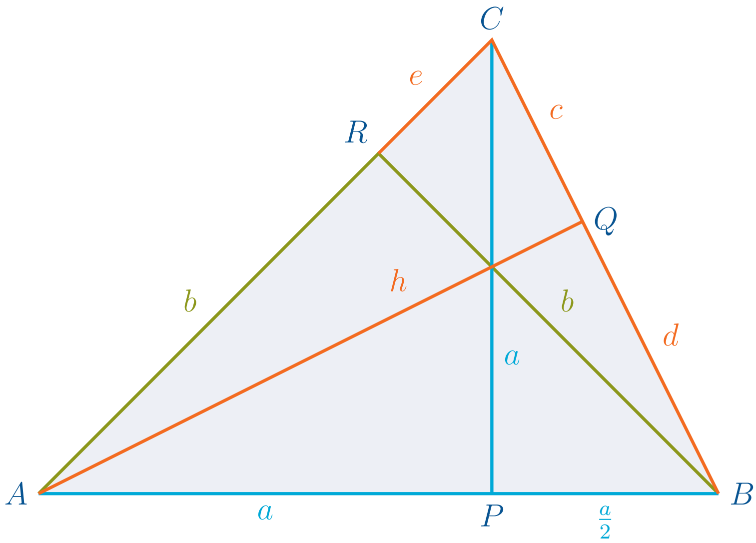
Aufgabe E 4 (8 Punkte)

Gegeben sei ein spitzwinkliges Dreieck mit Ecken A, B, C und Höhenfußpunkten P, Q, R. Bekannt sei, dass der Abstand von P zu C gleich dem Abstand von P zu A und doppelt so groß wie der Abstand von P zu B ist.



Zeigen Sie, dass der Abstand von Q zu A das Dreifache des Abstandes von Q zu C ist.

Lösung



Das rechtwinklige Dreieck ΔPBC hat nach Voraussetzung Katheten der Länge $\frac{a}{2}$ und a, also hat die Hypotenuse die Länge $c + d = \frac{a}{2}\sqrt{5}$.
Das ebenfalls rechtwinklige Dreieck ΔABQ enthält auch den Winkel $\angle CBA$, ist also ähnlich zu ΔPBC. Für die Seitenverhältnisse gilt daher

$$\frac{h}{\frac{3}{2}a} = \frac{a}{c+d} = \frac{a}{\frac{a}{2}\sqrt{5}}, \quad \text{also} \quad h = \frac{3a}{\sqrt{5}} \tag{1}$$

$$\frac{d}{\frac{3}{2}a} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}\sqrt{5}}, \quad \text{also} \quad d = \frac{3a}{2\sqrt{5}}. \tag{2}$$

Damit lässt sich auch c durch a ausdrücken:

$$c = (c+d) - d = \frac{5a}{2\sqrt{5}} - \frac{3a}{2\sqrt{5}} = \frac{a}{\sqrt{5}}.$$

Vergleich mit Gleichung (1) ergibt das behauptete Ergebnis:

$$h = 3c.$$

Es gibt viele **weitere** (zumeist umständlichere) **Lösungswege**, zum Beispiel:

Es ist $\angle BAC = \angle PAC = \frac{\pi}{4}$, weil das Dreieck ΔAPC nach Voraussetzung gleichschenklig ist.
Dann ist auch $\angle RBA = \frac{\pi}{4}$ und damit $\overline{BR} = \overline{AR}$. Das ist die Länge b in der Skizze.
Die Dreiecke ΔAQC und ΔBCR sind ähnlich, denn beide sind rechtwinklig und enthalten den Winkel $\angle ACB$.

Das Verhältnis der Katheten ist daher in beiden Dreiecken gleich:

$$\frac{h}{c} = \frac{b}{e} \tag{1}$$

Pythagoras für die beiden rechtwinkligen Dreiecke ΔABR und ΔAPC liefert

$$2b^2 = (a + \frac{a}{2})^2 = \frac{9}{4}a^2$$
$$2a^2 = (e + b)^2$$

Eliminieren von a^2 ergibt

$$2b^2 = \frac{9}{8}(e + b)^2 \quad \text{oder} \quad 16b^2 = 9(e + b)^2.$$

Durch Wurzelziehen wird daraus

$$4b = 3(b + e),$$

weil beide Seiten positive Zahlen sein müssen. Also ist $b = 3e$ und damit wegen (1) schließlich, wie behauptet

$$h = 3c.$$

Anmerkung: Bezeichnet man, wie üblich, mit α den Winkel bei A, mit β den bei B und mit γ den bei C, so besagt die Voraussetzung, dass $\tan(\alpha) = 1$ und $\tan(\beta) = 2$ ist.

In der Aufgabe wird gezeigt, dass unter dieser Voraussetzung $\tan(\gamma) = 3$ ist. Da die Winkelsumme im Dreieck 180° ist, haben wir damit die nette Formel

$$\arctan(1) + \arctan(2) + \arctan(3) = 180°$$

gezeigt. Dabei bezeichnet für eine reelle Zahl x der „Arkustangens“ $\arctan(x)$ den Winkel, dessen Tangens x ist.