

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe S 1 (4 Punkte)

Geben Sie eine 4-stellige Zahl $ABCD$ an, bei der die Multiplikation mit 4 die Reihenfolge der vier Ziffern umkehrt, also daraus $DCBA$ macht.

Lösung

Die Lösung lautet

$$\boxed{ABCD=2178}.$$

Es soll gelten

$$4 \cdot ABCD = DCBA$$

Da beide Zahlen vierstellig sind, darf A nur 1 oder 2 sein, sonst wäre $4 \cdot ABCD > 9999$. $DCBA$ muss durch 4 teilbar sein. Daher ist A gerade, also $A = 2$.

Damit ist $DCBA = 4 \cdot ABCD > 8000$ also $D = 8$ oder $D = 9$.

$4 \cdot 8 = 32$ und $4 \cdot 9 = 36$. Nur im Fall $D = 8$ erhält man bei Multiplikation mit 4 aus $ABCD$ an der Einerstelle eine 2.

Es gilt also

$$4 \cdot 2BC8 = 8CB2$$

und damit

$$4 \cdot (2000 + 100 \cdot B + 10 \cdot C + 8) = 8000 + 100 \cdot C + 10 \cdot B + 2$$

$$8000 + 400 \cdot B + 40 \cdot C + 32 = 8000 + 100 \cdot C + 10 \cdot B + 2$$

$$390 \cdot B - 60 \cdot C + 30 = 0$$

$$13 \cdot B - 2 \cdot C + 1 = 0$$

$$2 \cdot C = 13 \cdot B + 1$$

$$C = \frac{13 \cdot B + 1}{2}$$

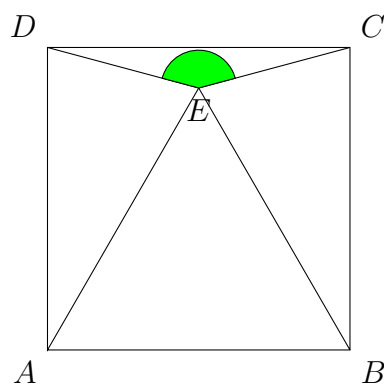
Wegen $C < 10$ ist $B < 2$. Bei $B = 0$ wäre C nicht ganzzahlig, also ist

$$B = 1 \quad \text{und damit} \quad C = 7.$$

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

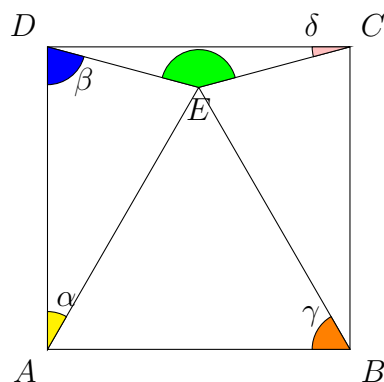
Aufgabe S 2 (4 Punkte)

Im Quadrat $ABCD$ liegt das gleichseitige Dreieck ABE wie in der Abbildung.



Wie groß ist der Winkel $\angle CED$?

Lösung



Dreieck ABE ist gleichseitig, daher sind alle Dreieckswinkel gleich $\gamma = 60^\circ$.

Die Dreiecke AED und BCE sind gleichschenkelig und kongruent.

In der Spitze liegt der Winkel $\alpha = 90^\circ - \gamma = 30^\circ$.

Folglich gilt für die gleichen Winkel der Basis

$$\beta = \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 75^\circ$$

Der kleine Winkel $\delta = \angle DCE$ ergibt sich dann zu $\delta = 90^\circ - \beta = 15^\circ$
und der gesuchte Winkel beträgt

$$\boxed{\angle CED = 180^\circ - 2 \cdot \delta = 150^\circ} .$$

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe S 3 (4 Punkte)

In einem konvexen n -Eck sei die Summe von $n - 1$ Innenwinkeln 2024° .

Geben Sie n und die Größe des verbleibenden Winkels an.

Lösung

Die Winkelsumme im Dreieck beträgt 180° . Mit jedem zusätzlichen Eckpunkt wächst die Winkelsumme um 180° . Die Winkelsumme im n -Eck beträgt also $(n - 2) \cdot 180^\circ$.

In einem konvexen n -Eck liegen alle Innenwinkel zwischen 0° und 180° .

$$\Rightarrow (n - 2) \cdot 180^\circ - 180^\circ < 2024^\circ < (n - 2) \cdot 180^\circ$$

$$2024 : 180 = 11 \text{ Rest } 44$$

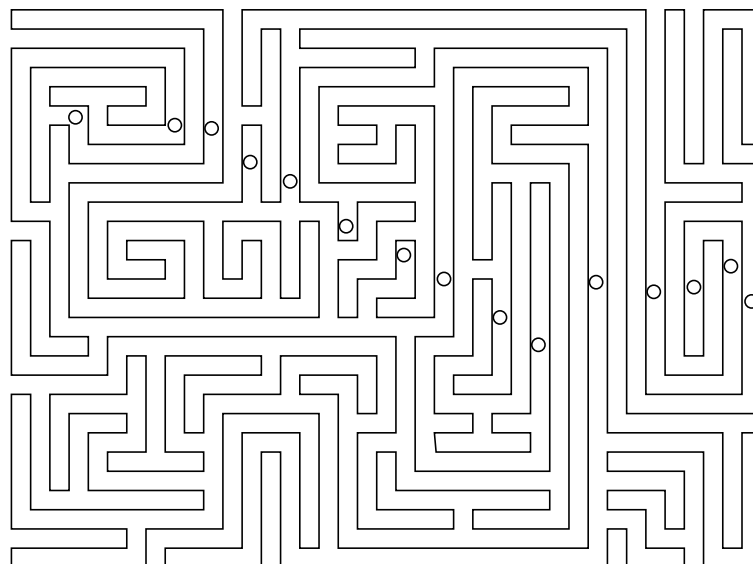
Also ist $n - 2 = 12$ und damit $n = 14$.

Der verbleibende Winkel ist $180^\circ - 44^\circ = 136^\circ$.

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe S 4 (4 Punkte)

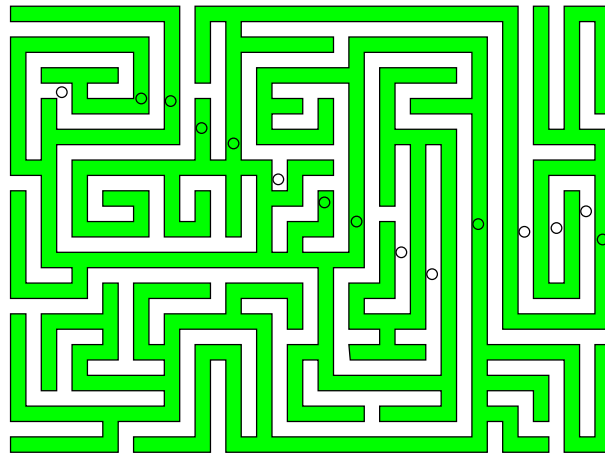
Ludwig hat auf der Weide einen langen Drahtzaun sehr verwinkelt aufgestellt und das Ende mit dem Anfang verbunden. Nun sind einige Lämmer (kleine Kreise) gar nicht eingesperrt und könnten weglaufen.



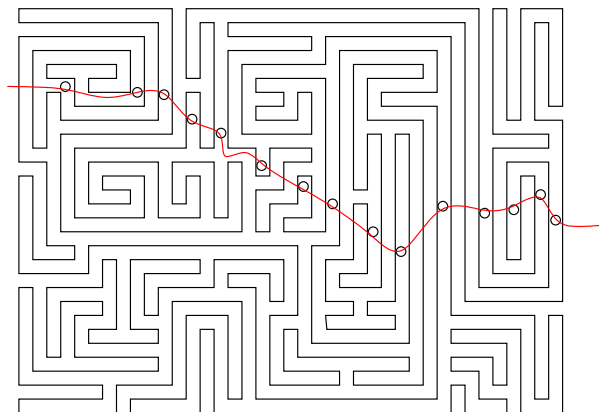
Wie viele Lämmer hat Ludwig mit dem Zaun eingesperrt?

Lösung

Im Zaun (auf der grünen Fläche) eingesperrt sind genau 8 Lämmer.
(7 Lämmer sind frei und befinden sich lediglich in einem Irrgarten.)



Die Lösung durch Einzeichnen der umzäunten Fläche (grün) ist aber sehr aufwändig. Schneller geht es, wenn man sich klar macht, dass der Zaun die gesamte Fläche in einen abgeschlossenen inneren Bereich (grün) und einen von außen zugänglichen Bereich (weiß) aufteilt und dass man jedesmal, wenn man über den Zaun steigt, den Bereich wechselt. Lämmer, die man von außen durch eine Kurve erreicht, die den Zaun ungeradzahlig oft kreuzt, sind eingesperrt, die anderen frei.



Auf diese Weise kann man für jedes Lamm entscheiden, ob es eingesperrt ist oder frei.

Noch effizienter zieht man eine Linie von außen durch mehrere Lämmer und wechselt bei jeder Zaunkreuzung zwischen *frei* und *eingesperrt* hin und her. So findet man für die rote Linie von links beginnend (die Zahlen geben die Zaunkreuzungen zwischen den Lämmern an)

2 frei 1 eingesperrt 2 eingesperrt 2 eingesperrt 2 eingesperrt 1 frei 3 eingesperrt
2 eingesperrt 3 frei 2 frei 3 eingesperrt 3 frei 2 frei 2 frei 1 eingesperrt 1

Insgesamt sind also 7 Lämmer frei und 8 eingesperrt

(Bemerkung: Um einen geschlossenen Polygonzug mit grüner Farbe zu füllen, verwendet der Computer eine ähnliche Strategie. Für jede Pixelzeile entscheidet er, wo Schnittpunkte mit den Polygonkanten liegen und wechselt dort die Färbung.)

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe S 5 (4 Punkte)

Der schachbegeisterte Vater verspricht seiner Tochter mehr Taschengeld, wenn sie von drei Schachpartien, die sie abwechselnd gegen ihren Vater und gegen ihre Mutter spielt, zwei Partien in Folge gewinnt. Die Mutter spielt dabei deutlich besser als der Vater.

Die Tochter darf wählen, gegen wen sie zuerst spielen will. Sollte sie zuerst gegen ihren Vater oder zuerst gegen ihre Mutter spielen, oder ist das egal?

Lösung

Die Tochter sollte zuerst gegen ihre Mutter spielen.

Intuitiv ist das klar, da sie auf jeden Fall einmal gegen ihre Mutter und einmal gegen ihren Vater gewinnen muss und im ersten Fall zweimal die Chance hat, gegen die stärkere Mutter doch zu gewinnen.

Mit Wahrscheinlichkeiten kann man folgendermaßen argumentieren:

Sei p die Siegchance der Tochter gegen die Mutter und $q > p$ ihre Siegchance gegen den Vater. Sie erhält mehr Taschengeld, wenn sie

- die ersten beiden Partien gewinnt. Das geschieht mit Wahrscheinlichkeit pq , unabhängig davon, gegen wen sie zuerst spielt,
- die erste Partie verliert und die beiden anderen gewinnt. Das geschieht mit Wahrscheinlichkeit $(1 - p)qp$, wenn sie zuerst gegen die Mutter spielt, und mit Wahrscheinlichkeit $(1 - q)pq < (1 - p)qp$, wenn sie zuerst gegen den Vater spielt.

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe S 6 (4 Punkte)

Eine Tischtennisgruppe hat 12 aktive Spieler.

Wie viele Möglichkeiten gibt es, diese zu sechs Doppeln zu gruppieren?

Lösung

Nummeriere alle Spieler von 1 bis 12.

Für Nummer 1 gibt es 11 mögliche Doppelpartner.

Für den Spieler mit der kleinsten Nummer, der noch nicht zugeordnet ist, gibt es dann noch 9 mögliche Partner.

Wieder betrachten wir den Spieler mit der kleinsten Nummer, der noch nicht in einem Doppel ist; für ihn gibt es noch 7 mögliche Partner, usw.

Insgesamt gibt es also

$$11 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 = 10395$$

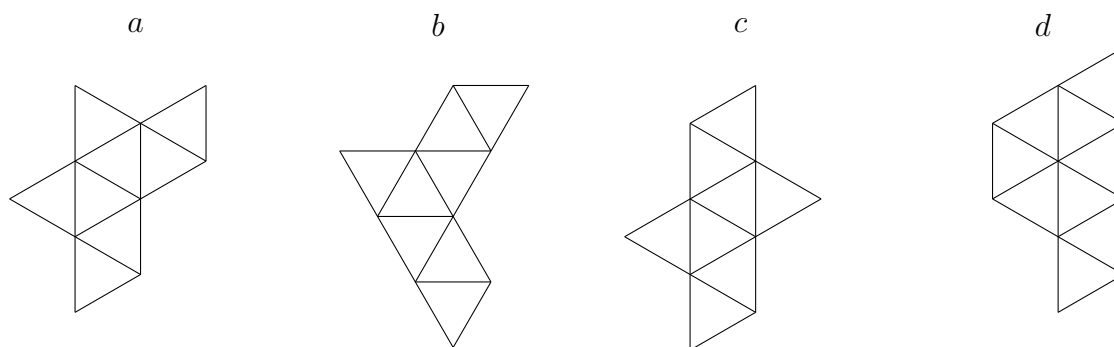
Möglichkeiten, sechs Doppel zu bilden.

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe S 7 (4 Punkte)

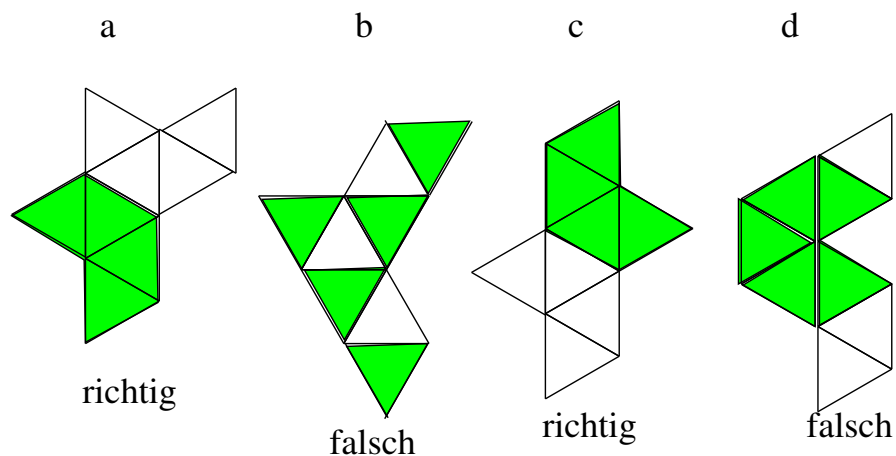
Die Oberfläche eines Oktaeders besteht aus 8 gleichseitigen Dreiecken.

Welche der abgebildeten Dreiecksnetze a,b,c,d lassen sich entlang der Dreieckskanten zu einem Oktaeder falten?



Lösung

Zu einem Oktaedernetz lassen sich nur die Netze a und c falten.



Begründung:

Im Oktaeder gehen von jedem Eckpunkt 4 Kanten aus. Jeder Eckpunkt ist also gleichzeitig Eckpunkt von 4 Dreiecken. In einem Oktaedernetz darf es daher keinen Punkt geben, der Eckpunkt von mehr als 4 Dreiecken ist. Im vierten Netz haben alle fünf grünen Dreiecke einen gemeinsamen Eckpunkt. Dies ist also kein Oktaedernetz.

4 benachbarte Dreiecke, die an einem Punkt P zusammenhängen und eine „Sichel“ bilden, lassen sich zu einer Pyramide ohne Boden falten. Sie müssen auch zu einer Pyramide gefaltet werden, weil sonst an dem Punkt P fünf Kanten zusammenlaufen. Hängen zwei solcher Sicheln mit einer Außenkante aneinander, kann man die beiden Pyramiden anschließend zu einem Oktaeder zusammenklappen. Das erste und dritte Netz ist also ein Oktaedernetz.

Man kann ein Oktaeder mit zwei Farben so färben, dass benachbarte Dreiecke des Oktaeders immer verschieden gefärbt sind. Dies ändert sich auch nicht, wenn man sie aufschneidet und flachlegt. Im aufgeschnittenen Oktaedernetz haben dann Dreiecke, die noch zusammenhängen, eine unterschiedliche Farbe. Ein funktionierendes Oktaedernetz muss dann jeweils zwei Sätze von vier gleich gefärbten Dreiecken enthalten, wenn man benachbarte Dreiecke verschieden färbt. Das zweite Gitternetz ist also kein Oktaedernetz.

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe S 8 (4 Punkte)

Von einem dreistelligen Zahlenschloss mit der Zahlenkombination ABC sei bekannt, dass A , B , C , AB , BC und ABC jeweils Primzahlen sind.

Wie lautet die Zahl ABC ?

Lösung

Für A , B und C kommen als Primzahlen nur die Ziffern 2, 3, 5, 7 infrage.

B und C können nicht 2 oder 5 sein, weil sonst AB oder BC durch 2 oder 5 teilbar wäre.

B und C können auch nicht gleich sein, weil sonst BC durch 11 teilbar wäre.

Also ist $BC = 37$ oder $BC = 73$.

Da ABC eine Primzahl ist, ist die Quersumme $A + B + C$ nicht durch 3 teilbar. Das schließt $A = 2$ und $A = 5$ aus.

Schließlich ist $A \neq B$, weil sonst AB durch 11 teilbar wäre.

Also ist $ABC = 373$ oder $ABC = 737$.

Aber $737 = 11 \cdot 67$ ist keine Primzahl, also bleibt nur

$$\boxed{ABC = 373}.$$

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe S 9 (4 Punkte)

In einem quadratischen Brunnen von Kantenlänge 1 steht eine kreisförmige Dose vom Radius r .

- Mit welcher Wahrscheinlichkeit (in Abhängigkeit von r) fallen von drei zufällig in den Brunnen geworfenen Münzen genau zwei in die Dose?
- Wie groß muss der Radius der Dose sein, damit die Wahrscheinlichkeit aus Teil a) möglichst groß wird?

Hinweis: „Zufällig“ bedeutet dabei, dass jede Stelle im Brunnen mit gleicher Wahrscheinlichkeit getroffen wird.

Lösung

- Die Wahrscheinlichkeit, mit einem Wurf die Dose zu treffen, ist das Verhältnis der Flächen von Dose und Brunnen, also

$$p = \frac{\pi r^2}{1^2} = \pi r^2.$$

Bei drei Würfen erzielt man genau 2 Treffer, wenn die Dose bei zwei Würfen getroffen wird und bei einem nicht. Dafür gibt es 3 Möglichkeiten, jeweils mit Wahrscheinlichkeit $p^2(1-p)$. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also

$$f(p) = 3 \cdot p^2(1-p).$$

- $f(p)$ wird maximal, wenn $f'(p) = 0$ und $f''(p) < 0$.

Es ist $f'(p) = 6p - 9p^2 = 3p(2 - 3p)$ und $f''(p) = 6 - 18p$.

Das Maximum liegt also bei $p = \frac{2}{3}$ und damit bei

$$r = \sqrt{\frac{p}{\pi}} = \sqrt{\frac{2}{3\pi}}.$$