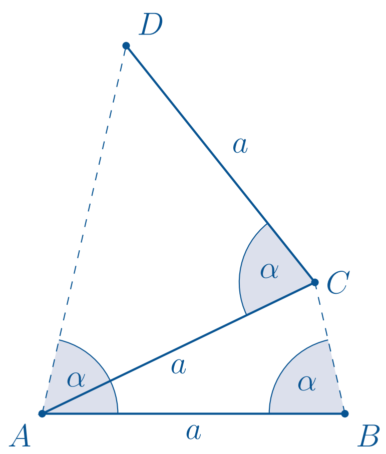
Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

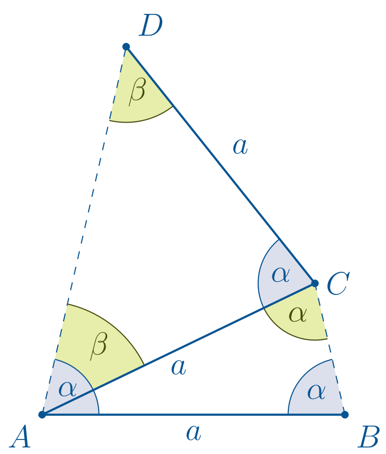
Aufgabe S 1 (4 Punkte)

Drei Stäbe der Länge a werden so gelegt, dass entsprechend nachstehender Abbildung ein Viereck $ABCD$ entsteht. Dabei tritt der Winkel α mehrfach auf.

Wie groß ist er?



Lösung:
Das Dreieck ABC und das Dreieck ACD sind gleichschenklig, folglich sind die Basiswinkel gleich.



$\triangle ABC$:

$$\begin{aligned} (\alpha-\beta)+2\alpha &= 180^\circ \\ \beta &= 3\alpha - 180^\circ \qquad (1) \end{aligned}$$

$\triangle ACD$:

$$\begin{aligned} 2\beta+\alpha &= 180^\circ \qquad (2) \\ 6\alpha - 360^\circ + \alpha &= 180^\circ \qquad (1) \text{ in } (2) \\ \alpha &= \frac{540^\circ}{7} = \frac{3\pi}{7} \end{aligned}$$

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe S 2 (4 Punkte)

Schreiben Sie die Zahlen von 1 bis 15 so in die 15 Kästchen, dass die Summe der zwei Zahlen von benachbarten Kästchen jeweils eine Quadratzahl ergibt.

Lösung:
Die möglichen Quadratzahlen sind $1, 4, 9, 16$ und 25.
Für 8 und 9 gibt es jeweils nur eine Möglichkeit, sie durch eine andere Zahl zu einer Quadratzahl zu ergänzen (nämlich 1 bzw. 7). Sie müssen also am Rand stehen:

8	1												7	9

7 hat dann als anderen Nachbarn 2, 2 als anderen Nachbarn 14, 14 als anderen Nachbarn 11, 11 als anderen Nachbarn 5, 5 als anderen Nachbarn 4, 4 als anderen Nachbarn 12, 12 als anderen Nachbarn 13, 13 als anderen Nachbarn 3 und man erhält:

8	1				3	13	12	4	5	11	14	2	7	9

3 hat zwar drei mögliche Nachbarn $(1, 6, 13)$, aber 1 ist schon verbraucht. So erhält man $6, 10$ und 15:

8	1	15	10	6	3	13	12	4	5	11	14	2	7	9

Setzt man die 8 nach rechts, erhält man die Zahlen in umgedrehter Reihenfolge:

9	7	2	14	11	5	4	12	13	3	6	10	15	1	8

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe S 3 (4 Punkte)

Frieda hat eine Reise geplant, bei der sie bei einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 60 km/h gerade noch rechtzeitig zu einem wichtigen Treffen ankommt. Wegen mehrerer Staus erreicht sie auf der ersten Hälfte der Strecke nur eine Durchschschnittsgeschwindigkeit von 40 km/h.

Wie schnell muss Frieda die zweite Hälfte der Strecke im Mittel mindestens zurücklegen, um noch rechtzeitig anzukommen?

Lösung:
Braucht Frieda für die erste Streckenhälfte mit $v = 60\,\mathrm{km/h}$ die Zeit T, so braucht sie bei $v_1 = 40\,\mathrm{km/h}$ die Zeit $t_1 = \frac{v}{v_1}T = \frac{3}{2}T$.

Es bleibt für die zweite Streckenhälfte statt T nur noch die Zeit $t_2 = 2T - t_1 = \frac{T}{2}$ übrig. Daher muss Frieda die zweite Streckenhälfte mit $v_2 = \frac{v}{t_2} = 120\,\mathrm{km/h}$ fahren.

Insbesondere ist also die Durchschnittsgeschwindigkeit nicht das arithmetische Mittel der gefahrenen Geschwindigkeiten der beiden Streckenhälften, sondern das „harmonische Mittel“:

$$v = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}}.$$

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe S 4 (4 Punkte)

Von einem Polynom

$$P(x) = 71 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

mit einer natürlichen Zahl n und **ganzzahligen** Koeffizienten $a_1, \ldots, a_n$ sei bekannt, dass eine natürliche Zahl $y \in \mathbb{N}$ existiert mit $y < 71$ und $P(y) = y$.

Man bestimme y.

Lösung:
Durch Umstellen wird aus der Gleichung

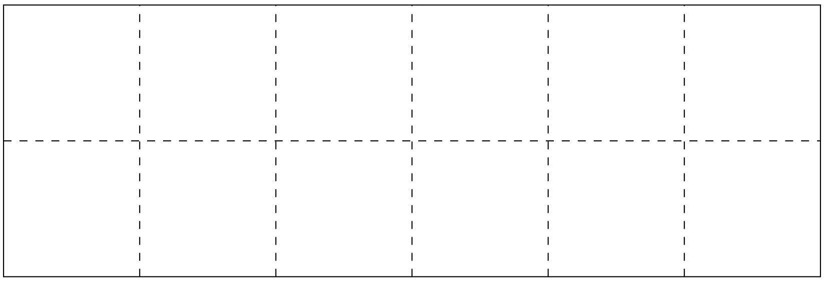
$$\begin{aligned} y &= P(y) = 71 + a_1 y + \cdots + a_n y^n \\ 71 &= y\left(1 - a_1 - a_2 y - \cdots - a_n y^{n-1}\right) \end{aligned}$$

Dabei ist die Klammer ganzzahlig und folglich ist 71 durch y teilbar. Da aber 71 eine Primzahl ist und $y < 71$, muss $y = 1$ sein.

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe S 5 (4 Punkte)

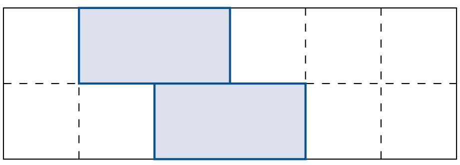
Wie viele Möglichkeiten gibt es, das abgebildete Rechteck der Größe 6×2 mit Steinen der Größe 2×1 oder 1×2 zu füllen?



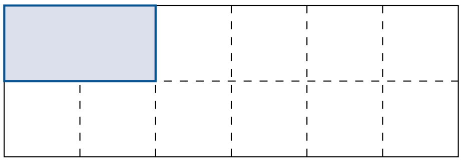
Lösung:
Es gibt 13 Möglichkeiten, nämlich

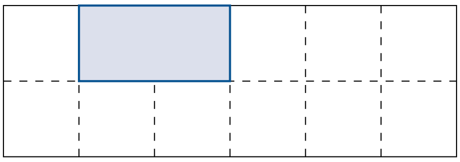
- 1 Möglichkeit null Steine horizontal zu legen (dann liegen alle Steine senkrecht),
- 5 Möglichkeiten zwei Steine horizontal zu legen,
- 1 Möglichkeit alle sechs Steine horizontal zu legen und
- $6 = 3 + 2 + 1$ Möglichkeiten vier Steine horizontal zu legen.

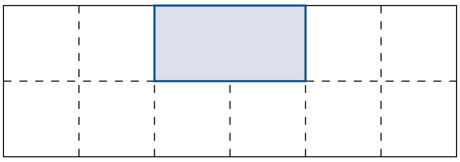
Begründung: Zunächst erkennt man, dass horizontale Steine in den beiden Reihen genau untereinander liegen müssen, da versetzt liegende Steine vom Rechteck 2 Restgebiete mit ungerader Kästchenzahl abtrennen, die nicht gefüllt werden können:



Es genügt also zu zählen, auf wieviele Arten man die Steine mit Lücken in der ersten Zeile horizontal legen kann. Die Lücken werden dann durch senkrechte Steine gefüllt. Es können $0, 1, 2$ oder 3 Steine in der ersten Reihe horizontal gelegt werden. Das führt zu den oben genannten Möglichkeiten. Bei zwei horizontalen Steinen hat man für den zweiten Stein noch 3 Möglichkeiten, wenn der erste ganz links beginnt, 2 Möglichkeiten, wenn der erste beim zweiten Kästchen beginnt, und nur noch eine Möglichkeit, wenn der erste Stein beim dritten Kästchen beginnt:



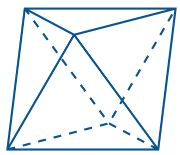




Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

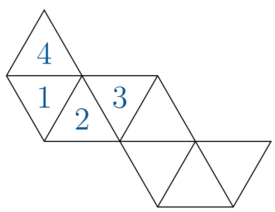
Aufgabe S 6 (4 Punkte)

Die Oberfläche eines Oktaeders besteht aus 8 Seitenflächen, die gleichseitige Dreiecke sind. Er hat 6 Ecken, 8 Flächen und 12 Kanten.

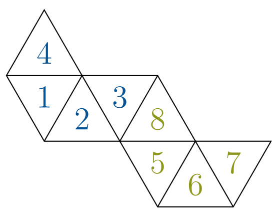


Bei einem Oktaederwürfel sind die acht dreieckigen Seitenflächen des Oktaeders so mit den Zahlen 1 bis 8 beschriftet, dass die Augensumme von gegenüberliegenden Seitenflächen immer gleich ist.

Ergänzen Sie die fehlenden Augenzahlen 5 bis 8 in dem unten abgebildeten Oktaedernetz, sodass daraus ein korrekt beschrifteter Oktaederwürfel gefaltet werden kann.



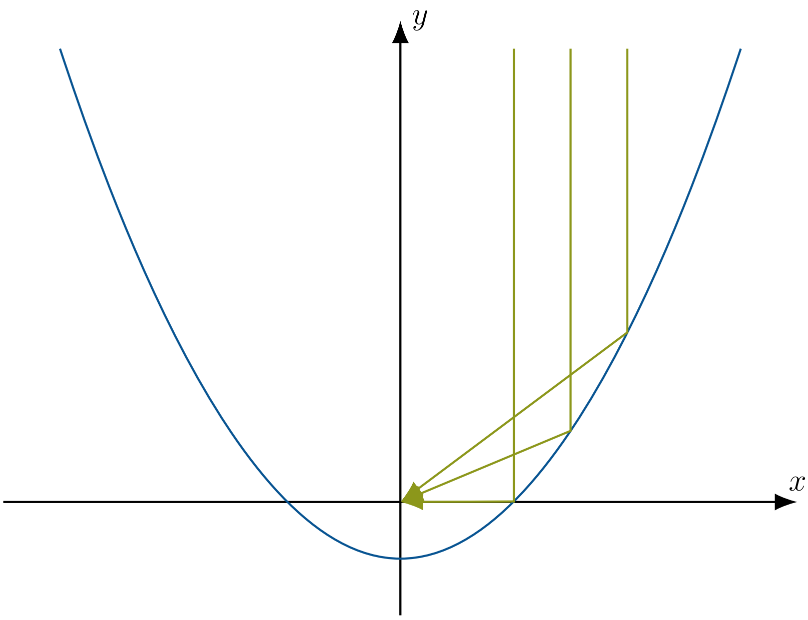
Lösung:
Die Augensumme gegenüberliegender Seitenflächen muss offenbar immer 9 betragen.
Die vier bereits beschrifteten Seiten werden beim Falten zu einer quadratischen Pyramide (ohne Boden). Die an 3 angrenzende Seite liegt dann der Seite 1 gegenüber, muss also mit 8 beschriftet werden. Die restlichen Seiten ergeben sich dann zu



Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe S 7 (4 Punkte)

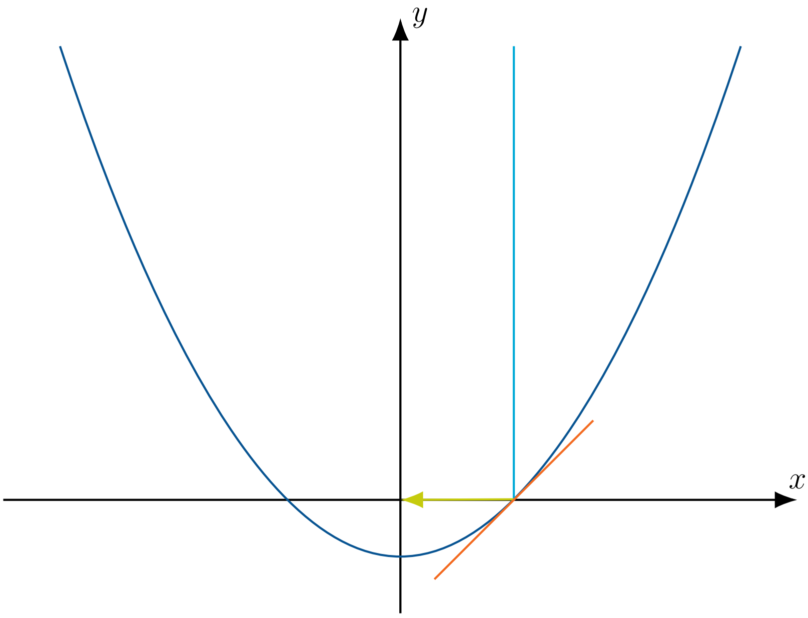
Eine Normalparabel $y = f(x) = x^2$ reflektiert alle senkrecht von oben kommenden Lichtstrahlen in einen Brennpunkt auf der y-Achse, wenn man sich den Graph der Parabel verspiegelt denkt (Parabolspiegel). Gesucht ist eine nach unten verschobene Normalparabel $y = f(x) = x^2 - a$, die alle senkrecht von oben kommenden Lichtstrahlen in den Koordinatenursprung reflektiert.



Wie groß ist die Verschiebung a zu wählen?

Hinweis: Die in der Aufgabenstellung genannte Reflexionseigenschaft der Normalparabel darf ohne Beweis verwendet werden.

Lösung:
Da alle senkrecht einfallenden Strahlen zum Ursprung hin reflektiert werden müssen, genügt es, einen einfallenden Strahl zu reflektieren und den Schnittpunkt des reflektierten Strahles mit der y-Achse zu berechnen. Dieser Schnittpunkt muss dann der Ursprung sein. Wählt man dazu den Strahl, der die Parabel an der positiven Nullstelle x_n trifft, muss er horizontal reflektiert werden.



Die Steigung der Parabel an der Nullstelle muss 45° betragen, also

$$f'(x_n) = 1 = \tan(45°).$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} f(x_n) &= x_n^2 - a = 0 \\ f'(x_n) &= 2x_n = 1 \\ &\Rightarrow x_n = \tfrac{1}{2} \\ &\Rightarrow a = x_n^2 = \tfrac{1}{4}. \end{aligned}$$

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe S 8 (4 Punkte)

Wieviele 6-stellige natürliche Zahlen gibt es, bei denen von je zwei Ziffern immer die weiter links stehende kleiner ist als die weiter rechts stehende?

Hinweis: Bei einer 6-stelligen Zahl darf die erste Ziffer nicht 0 sein.

Lösung:
Bei einer Zahl, die die Bedingung erfüllt, müssen alle sechs Ziffern verschieden sein.
Außerdem muss die kleinste Ziffer ganz links stehen, darf also nicht 0 sein.
Also gibt es für jede Auswahl von sechs der Ziffern $1, \ldots, 9$ genau eine sechsstellige Zahl der gesuchten Art, insgesamt also

$$\binom{9}{6} = \binom{9}{3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 84$$

solcher Zahlen.

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe S 9 (4 Punkte)

Ein Stammbruch ist ein Bruch $\frac{1}{n}$ mit $2 \leq n \in \mathbb{N}$. Jeder Bruch $\frac{a}{b}$ mit $a < b \in \mathbb{N}$ kann als Summe von verschiedenen Stammbrüchen dargestellt werden.
Beispiel:

$$\frac{13}{15} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$$

ist eine solche Stammbruchzerlegung. $\frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$ ist hingegen nicht erlaubt.

Finden Sie eine Stammbruchzerlegung von $\frac{3}{7}$, das heißt schreiben Sie $\frac{3}{7}$ als Summe **verschiedener** Stammbrüche.

Lösung:
Die Lösung ist nicht eindeutig, es gibt sogar unendlich viele Lösungen, z. B.

$$\begin{aligned}\frac{3}{7} &= \frac{1}{3} + \frac{1}{11} + \frac{1}{231} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{231} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{84}.\end{aligned}$$

Systematischer Lösungsweg:
Zu einem Bruch $\frac{Z}{N}$ sucht man zunächst den kleinsten Stammbruch $\frac{1}{n}$, der gerade noch größer oder gleich $\frac{Z}{N}$ ist. n erhält man durch Division mit Rest ($N = n \cdot Z + r$ mit $0 \leq r < Z$). Ist der Rest Null, geht die Division auf und $\frac{Z}{N}$ kann zu dem Stammbruch $\frac{1}{n}$ gekürzt werden und man ist fertig. Ansonsten gilt:

$$\frac{1}{n+1} < \frac{Z}{N} < \frac{1}{n}$$

und man zerlegt $\frac{Z}{N}$ in den Stammbruch $\frac{1}{n+1}$ und die Stammbruchzerlegung von $\frac{Z'}{N'} = \frac{Z}{N} - \frac{1}{n+1}$. Dabei ist $Z' = Z - (N - nZ) < Z$ (weil $nZ < N < (n+1)Z$), nach endlich vielen Schritten kommt man also bei einem Stammbruch an.

Für $\frac{3}{7}$ sieht dieses Verfahren so aus:

$$\begin{aligned}
7 &= 2 \cdot 3 \text{ (Rest 1)} \\
\frac{1}{3} &\leq \frac{3}{7} < \frac{1}{2} \\
\frac{3}{7} - \frac{1}{3} &= \frac{9-7}{21} = \frac{2}{21} \\
21 &= 10 \cdot 2 \text{ (Rest 1)} \\
\frac{1}{11} &\leq \frac{2}{21} < \frac{1}{10} \\
\frac{2}{21} - \frac{1}{11} &= \frac{22-21}{231} = \frac{1}{231} \\
\frac{3}{7} &= \frac{1}{3} + \frac{1}{11} + \frac{1}{231}.
\end{aligned}$$