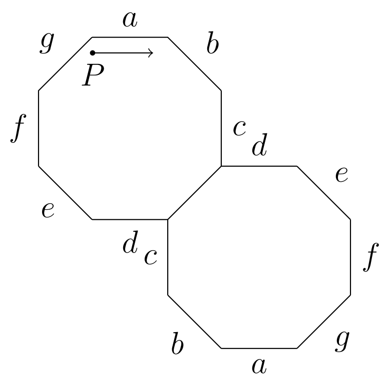
Aufgabe S 1 (4 Punkte)

Im abgebildeten regelmäßigen „Doppelachteck“ werden die Seiten verklebt, die mit demselben Buchstaben beschriftet sind.

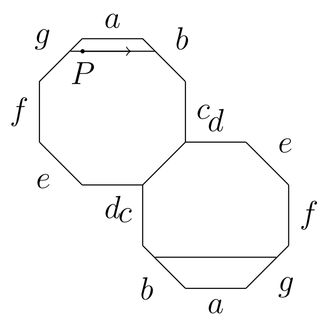


(a) Zeigen Sie, dass der Weg, der im Punkt P in horizontaler Richtung losgeht, an seinen Ausgangspunkt zurückkehrt, und bestimmen Sie seine Länge (die Achteckseiten haben Länge 1).

(b) Finden Sie einen geradlinigen Weg, der an seinen Ausgangspunkt zurückkehrt, nicht durch eine Ecke geht, und Länge < 2 hat.

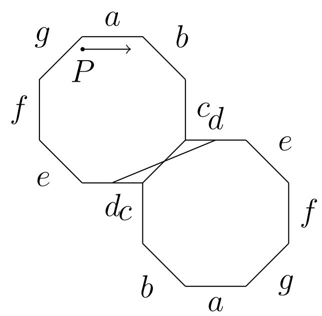
Lösung: (a)

Wie im Bild zu sehen läuft der Weg zunächst bis zur oberen Kante b, die mit der unteren Kante b verklebt ist. Dort läuft der Weg weiter bis zur unteren Kante g, um dann ins obere Achteck zurückzukehren und bei P zu enden. Die Länge des Weges ist zweimal die Kantenlänge plus zweimal der “horizontale Anteil” einer schrägen Kante, also $2 + \sqrt{2}$.



(b) Die Strecke, die die Mittelpunkte der beiden mit d markierten Kanten verbindet, wird durch die Verklebung geschlossen und bleibt geradlinig. Ihre Länge ist

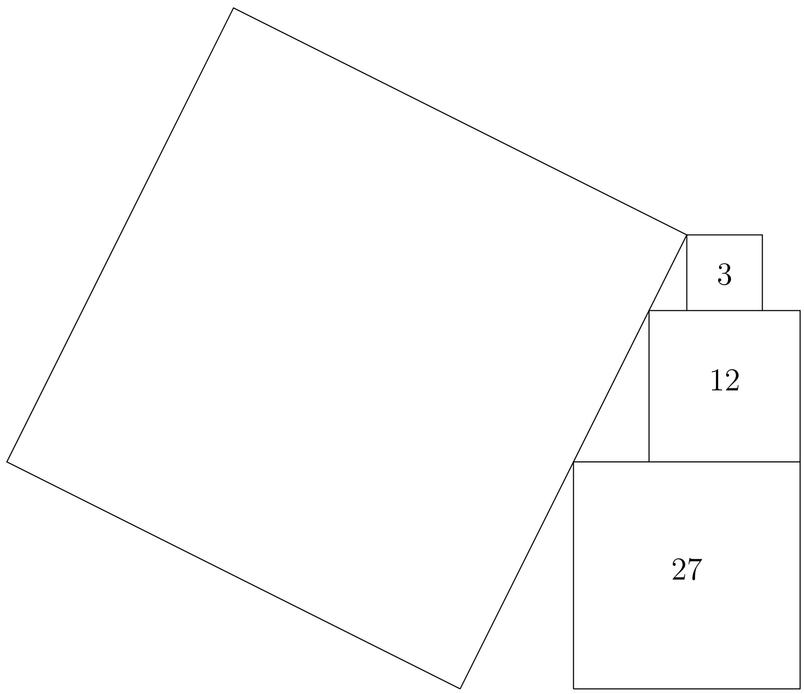
$$\sqrt{(1+\sqrt{2}/2)^2 + (\sqrt{2}/2)^2} = \sqrt{2+\sqrt{2}} < \sqrt{4} = 2.$$



Alternative: Eine Lösung der Aufgabe (b) lässt sich auch mit einer Linie durch P angeben, die dieselbe Steigung hat wie die hier benutzte. Diese verbindet dann g und a im oberen Achteck sowie a und g im unteren.

Aufgabe S 2 (4 Punkte)

Gegeben sind 4 Quadrate, die wie folgt angeordnet sind.



Bestimmen Sie den Flächeninhalt des großen Quadrats, wenn die kleineren die Flächeninhalte 3, 12 bzw. 27 haben.

Lösung: Die kleinen aber aufrechten Quadrate haben Kantenlängen $3\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, \sqrt{3}$. Die Steigung der schrägen Kante, die auf den Ecken der kleinen Quadrate aufliegt, ist also – wie man an den unteren beiden Quadraten sieht – $\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}-2\sqrt{3}} = 2$.

Mit Pythagoras ist das Quadrat der Länge der großen Quadratseite gleich

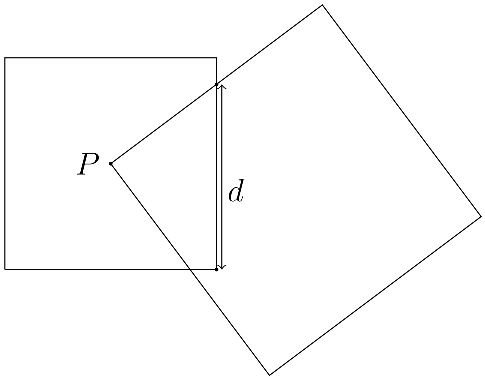
$$(6\sqrt{3})^2 + (3\sqrt{3})^2 = 135.$$

Hoppla!–Das ist ja der gesuchte Flächeninhalt.

Aufgabe S 3 (4 Punkte)

Das kleinere Quadrat habe Seitenlänge 8, das größere Seitenlänge 10 und die Strecke d habe die Länge 7.

Welchen Flächeninhalt hat der Durchschnitt der beiden Quadrate?
(Der Punkt P ist dabei Eckpunkt des größeren und Mittelpunkt des kleineren Quadrats).



Lösung:
Man kann das drehen und wenden wie man will; wenn eine Ecke des größeren Quadrates im Mittelpunkt des kleineren liegt, dann ist der Flächeninhalt des Durchschnittes ein Viertel der Fläche des kleineren Quadrates, denn wenn man diesen Durchschnitt um 90°, 180° und 270° dreht, überdecken diese kongruenten Vierecke das kleine Quadrat überschneidungsfrei.
Die Fläche des Durchschnittes ist in unserem Fall also $\frac{1}{4} \cdot 64 = 16$.

Aufgabe S 4 (4 Punkte)

Die siebenstelligen Zahlen $a = 13^5 + 16^5$ und $b = 17^5$ stimmen in den ersten 5 Ziffern überein.

Zeigen Sie, dass sie nicht gleich sind.

Lösung:
Die Einerstelle von 13^5 ist dieselbe wie die von $3^5 = 243$, also 3.
Die Einerstelle von 16^5 ist dieselbe wie die von 6^5, also 6.
Die Einerstelle von $13^5 + 16^5$ ist daher 9, während die von 17^5 gleich der von 7^5 ist, also 7.
Daher sind die Zahlen verschieden.

(Tatsächlich gilt $13^5 + 16^5 = 371293 + 1048576 = 1419869$ und $17^5 = 1419857$.)

Aufgabe S 5 (4 Punkte)

(a) Sei k eine natürliche Zahl. Geben Sie alle möglichen Endziffern der Zahl k^2 an.

(b) Für eine natürliche Zahl n definieren wir die Summe

$$S_n = 1! + 2! + \cdots + n!$$

Für welche n ist S_n eine Quadratzahl?

Lösung:

(a) 0, 1, 4, 5, 6, 9

(b) Für kleine Werte von n erhalten wir

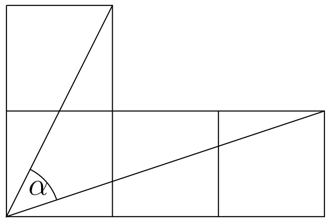
$$S_1 = 1,\ S_2 = 3,\ S_3 = 9,\ S_4 = 33,\ S_5 = 153.$$

Da für $k \geq 5$ stets $k!$ durch 10 teilbar ist, ändert sich die Endziffer von S_n ab $n = 5$ nicht mehr, und alle weiteren S_n haben Endziffer 3. Sie sind also keine Quadrate (wegen Teil (a)), und nur für $n = 1$ und $n = 3$ ist S_n eine Quadratzahl.

Aufgabe S 6 (4 Punkte)

Die 4 Quadrate in der Abbildung sind alle gleich groß.

Bestimmen Sie den Winkel α.



Lösung: Dreht man die linken beiden Quadrate um deren obere rechte Ecke mathematisch positiv um 90°, so wird die gedrehte Diagonale zur dritten Seite eines Dreiecks aus den "schrägen" Strecken, das – nach Konstruktion! – oben einen rechten Winkel hat und gleichschenklig ist. Daher gilt

$$\alpha = 45^\circ.$$

Aufgabe S 7 (4 Punkte)

Finden Sie natürliche Zahlen a und b, sodass alle folgenden Eigenschaften gelten:

$$a \text{ teilt nicht } b,\ b \text{ teilt nicht } a,\ a \text{ teilt } b^2,\ b \text{ teilt } a^2.$$

Lösung:
Eine mögliche Wahl ist $a = 2^2 \cdot 3 = 12,\ b = 2 \cdot 3^2 = 18$.
Aber es gibt noch viel mehr…

Aufgabe S 8 (4 Punkte)

Gegeben sind zwei faire Würfel $W1$ und $W2$ mit folgenden Seitenbeschriftungen:

$$\begin{aligned} W1: &\quad 3, 3, 1, -2, -4, 5 \\ W2: &\quad 5, 0, 7, -1, 12, x \end{aligned}$$

Bestimmen Sie $x \in \mathbb{Z}$ so, dass der Erwartungswert der Augensumme beim einmaligen Wurf mit beiden Würfeln 6 beträgt.

Lösung:
Der Erwartungswert ist

$$\frac{1}{6} \cdot (3 + 3 + 1 - 2 - 4 + 5 + 5 + 0 + 7 - 1 + 12 + x) = \frac{1}{6} \cdot (29 + x).$$

Daher muss $x = 7$ gewählt werden, und ja: Das ist eine ganze Zahl ;-)

Aufgabe S 9 (4 Punkte)

In wie viele Teile lässt sich eine Ebene durch 4 verschiedene Geraden unterteilen?

Geben Sie alle Möglichkeiten an.

Lösung:
Es können – von links nach rechts – 5,8,9,10 oder 11 Teile sein. Für 8,9 und 10 geben wir sogar jeweils zwei Möglichkeiten an: