Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe S 1 (4 Punkte)

Bei einer Meinungsumfrage vor einer Wahl ermittelte man, dass von den befragten wahlberechtigten Personen...

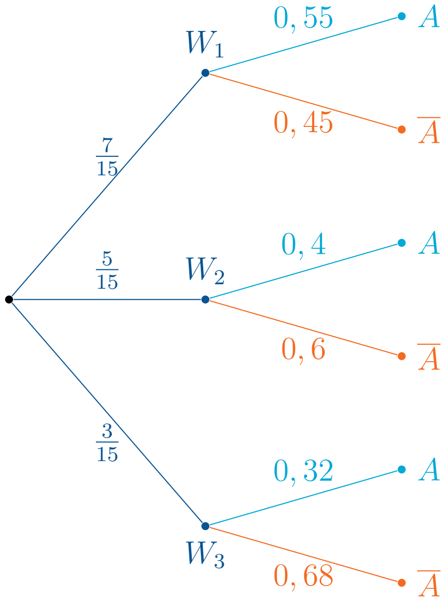
- ... 55 % der Personen, die jünger als 40 Jahre sind, für die Partei A stimmen.
- ... 40 % der Personen, die zwischen 40 und 60 Jahren sind, für die Partei A stimmen.
- ... 32 % der Personen, die älter als 60 Jahre sind, Partei A wählen wollen.

Die Anzahl der Wähler in den drei Altersgruppen steht im Verhältnis 7 : 5 : 3.

Mit wieviel Prozent der Stimmen kann die Partei A aufgrund dieses Umfrageergebnisses bei der Wahl rechnen?

Lösung

Die drei Altersgruppen unter 40 Jahre, 40 - 60 Jahre und über 60 Jahre seien mit W_1, W_2 und W_3 bezeichnet.



Für das Ereignis „eine zufällig ausgewählte Person wählt die Partei A“ mit der Wahrscheinlichkeit $p(A)$ gilt dann

$$\begin{aligned}
p(A) &= p(W_1) \cdot p_{W_1}(A) + p(W_2) \cdot p_{W_2}(A) + p(W_3) \cdot p_{W_3}(A) \\
&= \tfrac{7}{15} \cdot 0,55 + \tfrac{5}{15} \cdot 0,4 + \tfrac{3}{15} \cdot 0,32 \qquad (1) \\
&= \tfrac{1}{15} \cdot (3,85 + 2 + 0,96) \\
&= 0,454.
\end{aligned}$$

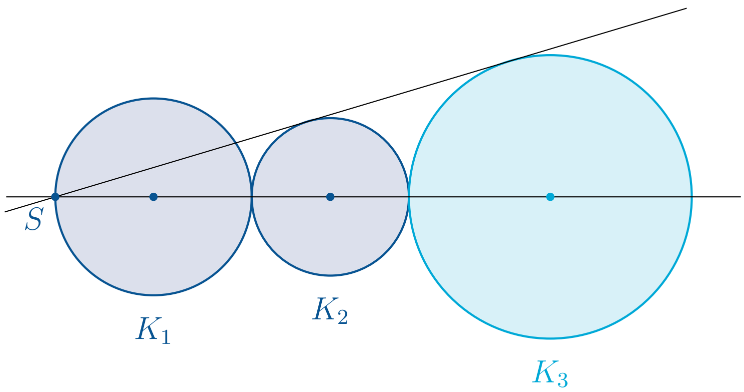
Die Partei A kann also mit einem Stimmenanteil von 45 % rechnen.

Hinweis für die Bepunktung: Ein Endergebnis in Form von Gleichung (1) ergibt $\boxed{2}$ *von vier Punkten.*

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

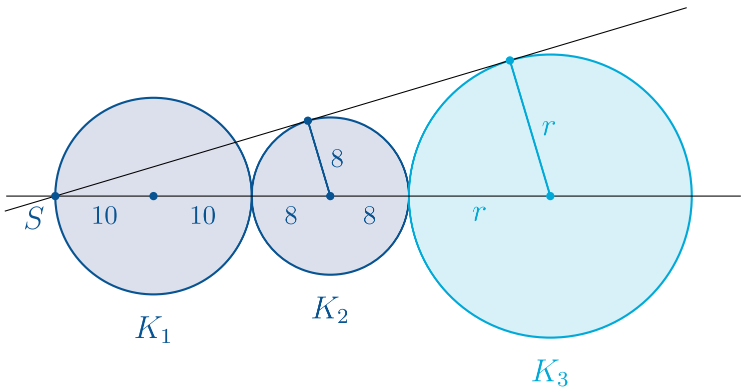
Aufgabe S 2 (4 Punkte)

Drei Kreise K_1, K_2 und K_3, deren Mittelpunkte auf einer Geraden liegen, stoßen mit ihren Umfängen aneinander. Der erste Kreis hat den Radius 10 und der zweite den Radius 8. Durch den äußeren Schnittpunkt S des ersten Kreises mit der Geraden läuft eine zweite Gerade, die den Kreis K_2 und auch den Kreis K_3 tangiert.



Wie groß ist der Radius des dritten Kreises K_3?

Lösung



Nach dem zweiten Strahlensatz gilt

$$\begin{aligned} & \tfrac{r}{10+10+8+8+r} = \tfrac{8}{10+10+8} \\ \Leftrightarrow \quad & \tfrac{r}{36+r} = \tfrac{2}{7} \\ \Leftrightarrow \quad & r = \tfrac{72}{5}. \end{aligned}$$

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe S 3 (4 Punkte)

Gesucht sind drei verschiedene Primzahlen $p_1 < p_2 < p_3$ mit der Eigenschaft, dass

$$((p_1 + 1) \cdot p_2 + 1) \cdot p_3 + 1$$

wieder eine Primzahl ist.

a) Bestimmen Sie p_1.

b) Geben Sie ein mögliches Tupel (p_1, p_2, p_3) an.

Lösung

Es gilt

$$((p_1 + 1) \cdot p_2 + 1) \cdot p_3 + 1 = 1 + p_3 + p_2 p_3 + p_1 p_2 p_3.$$

Die vier Summanden können nicht alle ungerade sein, sonst wäre die Summe gerade und als Primzahl käme nur 2 in Frage. Die Summe ist aber deutlich größer als 2. Es gibt also mindestens einen geraden Summanden, der als Produkt von Primzahlen den Faktor 2 enthalten muss. Da 2 die kleinste Primzahl ist, gilt $p_1 = 2$.

Zum Beispiel erfüllen $(p_1, p_2, p_3) = (2, 3, 7)$ die Bedingung.
(Ebenso $(p_1, p_2, p_3) = (2, 3, 13)$ oder $(p_1, p_2, p_3) = (2, 5, 7)$ und viele weitere.)
$(p_1, p_2, p_3) = (2, 3, 5)$ liefert $((2 + 1)3 + 1)5 + 1 = 51 = 3 \cdot 17$, also keine Primzahl.

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe S 4 (4 Punkte)

Die drei Freunde Max, Tom und Fritz sitzen beim Kartenspiel. Als Einsatz hat jeder einige Spielmarken. Bei jeder Spielrunde zahlt der Verlierer an die beiden anderen so viele Spielmarken, dass sich deren Besitz verdoppelt.
Beim ersten Spiel verliert Max, bei der zweiten Runde verliert Tom und beim letzten Spiel hat Fritz das Nachsehen. Erstaunt stellen die Freunde nach drei Spielrunden fest, dass jeder von ihnen nun acht Spielmarken besitzt.

Wie viele Spielmarken hatten Max, Tom und Fritz vor dem ersten Spiel?

Lösung

Hier bietet sich das Rückwärtsarbeiten an. Insgesamt sind 24 Marken im Spiel.

	Max	Tom	Fritz
Nach der 3. Runde	8	8	8
Nach der 2. Runde	4	4	16
Nach der 1. Runde	2	14	8
Vor der 1. Runde	13	7	4

Da nach der letzten Runde alle 8 Marken haben, müssen Tom und Max nach der zweiten Runde 4 Marken haben. Fritz muss also $24 - 8 = 16$ Marken haben.
Da nach der zweiten Runde Tom verteilt, muss Max nach der ersten Runde 2 Marken und Fritz 8 Marken haben. Somit bleiben für Tom $24 - 2 - 8 = 14$ Marken.
Vor der ersten Runde hatten also Tom 7, Fritz 4 und Max $24 - 7 - 4 = 13$ Marken.

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe S 5 (4 Punkte)

Geben Sie die kleinste natürliche Zahl $k > 1$ an, für die

$$\sqrt{k \cdot \sqrt{k \cdot \sqrt{k}}}$$

ebenfalls eine natürliche Zahl ist.

Lösung

Es gilt

$$\sqrt{k \cdot \sqrt{k \cdot \sqrt{k}}} = \sqrt{k \cdot \sqrt{k \cdot k^{\frac{1}{2}}}} = \sqrt{k \cdot \sqrt{k^{\frac{3}{2}}}} = \sqrt{k \cdot k^{\frac{3}{4}}} = \sqrt{k^{\frac{7}{4}}} = k^{\frac{7}{8}}.$$

Damit $k^{\frac{7}{8}}$ eine natürliche Zahl ist, muss k eine Zahl der Form n^8 sein. Die kleinste solche Zahl, die größer als 1 ist, ist $k = 2^8 = 256$.

Alternative Lösung (1. Teil)**:**

$$\begin{aligned}
& & \sqrt{k \cdot \sqrt{k \cdot \sqrt{k}}} &= n \\
&\Rightarrow & k \cdot \sqrt{k \cdot \sqrt{k}} &= n^2 \\
&\Rightarrow & k^2 \cdot k \cdot \sqrt{k} &= n^4 \\
&\Rightarrow & k^4 \cdot k^2 \cdot k &= n^8 \\
&\Rightarrow & k^7 &= n^8 \\
&\Rightarrow & k^{\frac{7}{8}} &= n
\end{aligned}$$

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe S 6 (4 Punkte)

Jemand hat alle natürlichen Zahlen von 1 bis 200 aufgeschrieben.
Dann wurden 2, 3, 5 und 7 und alle ihre Vielfachen sowie die 1 gestrichen.
Danach blieben von den 200 Zahlen noch 46 übrig.

Wieviele davon sind Primzahlen?

Lösung

Eine Zahl n, die keine Primzahl ist, hat mindestens 2 Primfaktoren. Der kleinste dieser Primfaktoren ist dann höchstens $\sqrt{n} \leq \sqrt{200} < \sqrt{225} = 15$.
Zahlen, die unter den ersten 200 Zahlen noch nicht gestrichen sind und keine Primzahlen sind, enthalten also als kleinsten Primfaktor entweder 11 oder 13, da die Vielfachen von 2, 3, 5 und 7 schon gestrichen sind. Der zweite Primfaktor ist dann höchstens $200/11 \approx 18,18$. Hier kommen also nur die Primzahlen 11, 13 und 17 in Frage:

$$\begin{aligned}
11 \cdot 11 &= 121 < 200 \\
11 \cdot 13 &= 143 < 200 \\
11 \cdot 17 &= 187 < 200 \\
13 \cdot 13 &= 169 < 200 \\
13 \cdot 17 &= 221 > 200
\end{aligned}$$

Unter den verbliebenen 46 Zahlen sind also **42 Primzahlen**.

Zusammen mit 2, 3, 5 und 7 gibt es 46 Primzahlen kleiner 200.

Bemerkung:
Beim Sieb des Eratosthenes werden zunächst alle ganzen Zahlen von 1 bis zu einer beliebigen Obergrenze aufgeschrieben. Dabei stehen in jeder Zeile immer gleich viele Zahlen.
Zunächst streicht man die 1, dann ist die kleinste verbleibende Zahl die Primzahl 2. Streicht man nun alle Vielfachen von 2 (2 inklusive), so ist die kleinste verbleibende Zahl die Primzahl 3. So kann man nach und nach alle Primzahlen finden.

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe S 7 (4 Punkte)

Marry ist 24 Jahre alt. Sie ist doppelt so alt, wie Anne war, als Marry so alt war, wie Anne jetzt ist.

Wie alt ist Anne?

Lösung

Die Aufgabenstellung bezieht sich auf zwei Zeitebenen:

a) Den gegenwärtigen Zeitpunkt, zu dem Marry 24 Jahre alt ist und

b) einen Zeitpunkt, der n Jahre zurück liegt.

Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

- M ist das gegenwärtige Alter von Marry (also $M = 24$).
- A ist das gegenwärtige Alter von Anne.
- n ist die Differenz zwischen den beiden Zeitebenen.

Aus dem ersten Teilsatz „Sie ist doppelt so alt, wie Anne war“ folgt

$$2 \cdot (A - n) = M.$$

Aus dem zweiten Teilsatz „als Marry so alt war, wie Anne jetzt ist“ folgt

$$M - n = A.$$

Wir setzen die zweite Gleichung in die erste ein und erhalten

$$2(M - n - n) = M \quad \Rightarrow \quad n = \tfrac{M}{4} = 6.$$

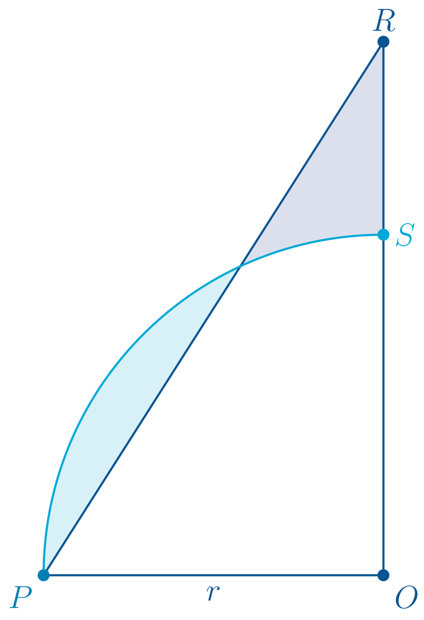
Mit $n = 6$ ergibt die zweite Gleichung

$$M - 6 = A \quad \Rightarrow \quad A = 24 - 6 = 18.$$

Damit ist Anne 18 Jahre alt.

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe S 8 (4 Punkte)



Die Figur zeigt einen Viertelkreis SP mit Mittelpunkt O und Radius r, sowie ein Dreieck $\triangle ORP$. Die beiden farbigen Bereiche haben denselben Flächeninhalt.

Wie lang ist die Strecke $\overline{OR}$?

Lösung

Wenn die beiden farbigen Bereiche denselben Flächeninhalt haben, dann haben auch die Flächen, die durch Kombination jeweils einer der farbigen Flächen zusammen mit der weißen Fläche im Dreieck entstehen, den gleichen Flächeninhalt.
Damit hat der Viertelkreis SP mit Mittelpunkt O denselben Flächeninhalt wie das Dreieck $\triangle ORP$.
Es folgt

$$\tfrac{\pi}{4} \cdot r^2 = \tfrac{1}{2} r \cdot |OR| \quad \Leftrightarrow \quad |OR| = \tfrac{\pi}{2} \cdot r.$$

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe S 9 (4 Punkte)

a) Sei s eine gerade ganze Zahl, die sich als Summe zweier Quadratzahlen schreiben lässt: $s = a^2 + b^2$ für geeignete ganze Zahlen a, b.

Berechnen Sie

$$\left(\tfrac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{a-b}{2}\right)^2.$$

b) Eine der bemerkenswerten Eigenschaften der Zahl 2025 liefert die Gleichung

$$2026 = 45^2 + 1.$$

Benutzen Sie diese und geben Sie ganze Zahlen c, d an, die die Gleichung

$$1013 = c^2 + d^2$$

erfüllen.

Lösung

a) Es gilt

$$\left(\tfrac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{a-b}{2}\right)^2 = \tfrac{a^2+2ab+b^2}{4} + \tfrac{a^2-2ab+b^2}{4} = \tfrac{a^2+b^2}{2} = \tfrac{s}{2}.$$

b) Mit $a = 45$ und $b = 1$ in a) ist $s = a^2 + b^2 = 2026$ und daher

$$1013 = \tfrac{s}{2} = \tfrac{a^2+b^2}{2} = \left(\tfrac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{a-b}{2}\right)^2 = 23^2 + 22^2.$$