

Tag der Mathematik 2024

Gruppenwettbewerb

Allgemeine Hinweise:

Als Hilfsmittel dürfen nur Schreibzeug, Geodreieck und Zirkel benutzt werden.
Elektronische Geräte sind nicht zugelassen.

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Die folgende Tabelle wird von den Korrektoren ausgefüllt.

Aufgabe	G 1	G 2	G 3	G 4	Summe
Mögliche Punktzahl	9	9	9	9	36
Erreichte Punktzahl					

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe G 1 (9 Punkte)

Gegeben seien 24 Punkte in der Ebene in allgemeiner Lage, das heißt, dass keine 3 Punkte auf einer Geraden liegen.

- Je 3 der 24 Punkte bestimmen dann als Eckpunkte ein Dreieck.
Wie viele solcher Dreiecke kann man bilden?
Die Dreiecke dürfen sich dabei überschneiden.
- Aus je 4 Punkten können 4 Dreiecke gebildet werden. Zeigen Sie, dass höchstens 3 von solchen 4 Dreiecken spitzwinklig sind, das heißt, dass alle Innenwinkel kleiner als 90° sind.
- Zeigen Sie, dass höchstens 75% der Dreiecke aus a) spitzwinklig sind.

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe G 2 (9 Punkte)

$ABCD$ sei ein Quadrat mit Kantenlänge größer als 6.

Der Kreis mit Radius $R = 6$ um den Punkt A berührt einen Kreis mit Radius $r = 3$, dessen Mittelpunkt E auf der Strecke DC liegt und der durch den Punkt C geht.

Die gemeinsame Tangente im Berührungspunkt der beiden Kreise schneidet die Seite AD im Punkt Y und die Seite BC im Punkt Z .

Skizzieren Sie die Situation und bestimmen Sie den Abstand zwischen Y und Z .

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe G 3 (9 Punkte)

- a) Zeigen Sie: Eine 4-stellige Dezimalzahl $ABCD$ ist durch 11 teilbar, wenn die alternierende Quersumme

$$Q_a(A, B, C, D) := D - C + B - A$$

durch 11 teilbar ist.

- b) Gegeben sei eine 4-stellige Zahl, die aus den 4 Ziffern 1,3,5,7 in beliebiger Reihenfolge besteht.

Welche Reste können entstehen, wenn sie durch 11 geteilt wird?

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe G 4 (9 Punkte)

Mit der Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 + 6}{2x + \sqrt{3}}$$

und einer Zahl $x_1 \geq \sqrt{3}$ kann man die Folge

$$x_1, \quad x_2 = f(x_1), \quad x_3 = f(x_2), \quad x_4 = f(x_3), \quad \dots$$

bilden. Dabei erhält man die nächste Zahl x_{k+1} der Folge dadurch, dass man die aktuelle Zahl x_k in die Funktion $f(x)$ einsetzt.

Zeigen Sie:

a) Für jedes $k \geq 1$ gilt $x_k \geq \sqrt{3}$.

b) Für jedes $k \geq 1$ gilt

$$x_{k+1} - \sqrt{3} \leq \frac{x_k - \sqrt{3}}{2}.$$