

Tag der Mathematik 2024

Gruppenwettbewerb

Allgemeine Hinweise:

Als Hilfsmittel dürfen nur Schreibzeug, Geodreieck und Zirkel benutzt werden.
Elektronische Geräte sind nicht zugelassen.

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Die folgende Tabelle wird von den Korrektoren ausgefüllt.

Aufgabe	G 1	G 2	G 3	G 4	Summe
Mögliche Punktzahl	9	9	9	9	36
Erreichte Punktzahl					

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe G 1 (9 Punkte)

Gegeben seien 24 Punkte in der Ebene in allgemeiner Lage, das heißt, dass keine 3 Punkte auf einer Geraden liegen.

- Je 3 der 24 Punkte bestimmen dann als Eckpunkte ein Dreieck.
Wie viele solcher Dreiecke kann man bilden?
Die Dreiecke dürfen sich dabei überschneiden.
- Aus je 4 Punkten können 4 Dreiecke gebildet werden. Zeigen Sie, dass höchstens 3 von solchen 4 Dreiecken spitzwinklig sind, das heißt, dass alle Innenwinkel kleiner als 90° sind.
- Zeigen Sie, dass höchstens 75% der Dreiecke aus a) spitzwinklig sind.

Lösung

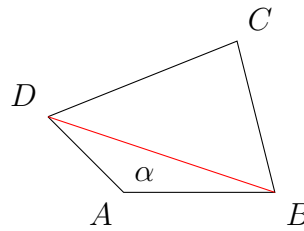
- Für die Wahl des ersten Eckpunktes hat man 24 Möglichkeiten, für die Wahl des zweiten Eckpunktes hat man dann noch 23 Möglichkeiten und für die Wahl des dritten Eckpunktes noch 22 Möglichkeiten.
Zusammen sind das $24 \cdot 23 \cdot 22$ Möglichkeiten, 3 Eckpunkte nacheinander auszuwählen.
Jedes Dreieck wird dabei sechsmal gezählt, denn es gibt 6 Möglichkeiten für die Reihenfolge seiner drei Eckpunkte. Es gibt also

$$\binom{24}{3} = \frac{24 \cdot 23 \cdot 22}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 2024$$

verschiedene Dreiecke.

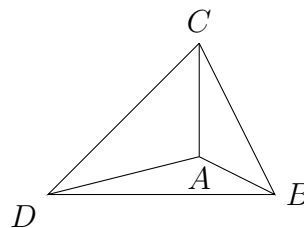
b) Für die Lage der vier Punkte unterscheiden wir zwei Fälle:

Fall 1: Sie bilden ein konvexes Viereck:



Die vier Winkel eines konvexen Vierecks ergeben zusammen 360° , also hat der größte mindestens 90° . Sei dies ohne Einschränkung der Winkel α bei A. Dann ist das Dreieck DAB nicht spitzwinklig.

Fall 2: Einer der 4 Punkte liegt im Inneren des von den anderen 3 Punkten gebildeten Dreiecks. Ohne Einschränkung sei dies der Punkt A.



Der Punkt A gehört zu 3 Dreiecken. Deren Winkel bei A ergeben zusammen 360° , mindestens einer von ihnen ist also größer als 90° . Das zugehörige Dreieck ist also nicht spitzwinklig.

c) Wie in a) stellt man fest, dass aus den 24 Punkten $(24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21) : 24 = 23 \cdot 22 \cdot 21$ verschiedene Vierecke gebildet werden können, denn bei 4 Punkten gibt es $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ Möglichkeiten für die Reihenfolge.

Nach b) enthält jedes dieser Vierecke mindestens ein nicht spitzwinkliges Dreieck. Jedes Dreieck gehört zu 21 Vierecken, weil es 21 Möglichkeiten gibt, zu den drei Eckpunkten des Dreiecks einen vierten Punkt hinzuzunehmen.

Damit ist die Anzahl der Dreiecke, die nicht spitzwinklig sind, mindestens $23 \cdot 22 = \frac{1}{4} \cdot 2024$. Umgekehrt sind also höchstens drei Viertel der 2024 Dreiecke aus Teil a) spitzwinklig.

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe G 2 (9 Punkte)

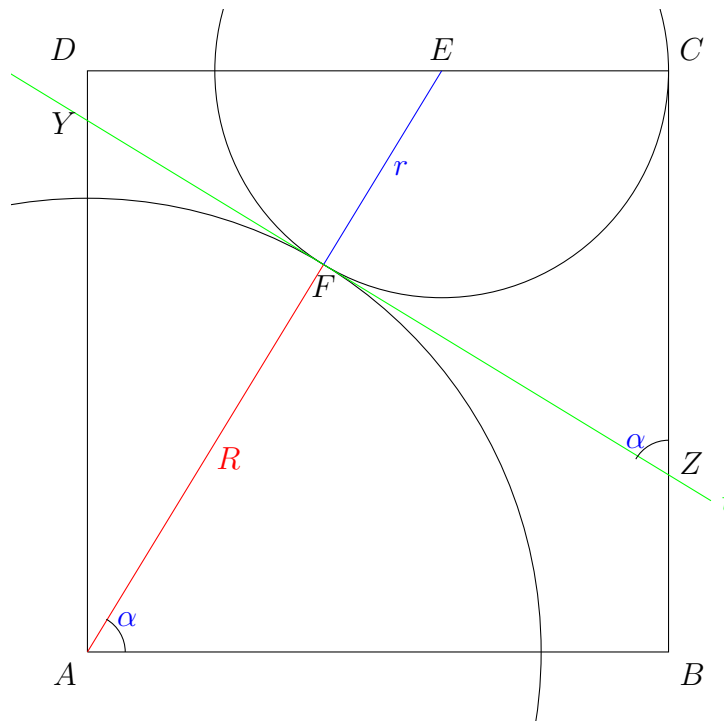
$ABCD$ sei ein Quadrat mit Kantenlänge größer als 6.

Der Kreis mit Radius $R = 6$ um den Punkt A berührt einen Kreis mit Radius $r = 3$, dessen Mittelpunkt E auf der Strecke DC liegt und der durch den Punkt C geht.

Die gemeinsame Tangente im Berührungspunkt der beiden Kreise schneidet die Seite AD im Punkt Y und die Seite BC im Punkt Z .

Skizzieren Sie die Situation und bestimmen Sie den Abstand zwischen Y und Z .

Lösung



Die Tangente t an die beiden Kreise im Berührungspunkt F steht senkrecht auf der Verbindungslinie AE der beiden Mittelpunkte.

Die Gerade durch A und E schneidet die beiden parallelen Strecken AB und DC im gleichen Winkel α wie die Tangente die beiden parallelen Strecken BC und AD .

Da $ABCD$ ein Quadrat ist, haben die Parallelen AB und DC denselben Abstand wie die Parallelen AD und BC (nämlich die Kantenlänge des Quadrats).

Daher ist $|YZ| = |AE| = R + r = 6 + 3 = 9$.

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe G 3 (9 Punkte)

- a) Zeigen Sie: Eine 4-stellige Dezimalzahl $ABCD$ ist durch 11 teilbar, wenn die alternierende Quersumme

$$Q_a(ABCD) := D - C + B - A$$

durch 11 teilbar ist.

- b) Gegeben sei eine 4-stellige Zahl, die aus den 4 Ziffern 1,3,5,7 in beliebiger Reihenfolge besteht.

Welche Reste können entstehen, wenn sie durch 11 geteilt wird?

Lösung

- a) Weil 1001 und 99 durch 11 teilbar sind, gilt

$$\begin{aligned}
 ABCD &= 1000 \cdot A + 100 \cdot B + 10 \cdot C + D \\
 &= 1001 \cdot A + 99 \cdot B + 11 \cdot C - A + B - C + D \\
 &= 11 \cdot (91 \cdot A + 9 \cdot B + C) + D - C + B - A.
 \end{aligned}$$

$ABCD$ ist also genau dann durch 11 teilbar, wenn $D - C + B - A = Q_a(ABCD)$ durch 11 teilbar ist.

- b) Der Beweis in a) zeigt, dass $ABCD$ bei Division durch 11 den gleichen Rest hat wie $Q_a(ABCD) = D - C + B - A$.

Da für A, B, C und D die Ziffern 1, 3, 5, 7 zu verwenden sind, ist $Q_a(ABCD)$ schon dadurch festgelegt, welche beiden Ziffern für B und D verwendet werden. Die sich ergebenden Möglichkeiten stehen in der folgenden Tabelle. Da der Rest definitionsgemäß immer eine Zahl zwischen 0 und 10 ist, stimmt er in den ersten beiden Zeilen nicht mit $Q_a(ABCD)$ überein.

$\{B, D\}$	$B + D$	$A + C$	$Q_a(ABCD)$	Rest
$\{1, 3\}$	4	12	-8	3
$\{1, 5\}$	6	10	-4	7
$\{1, 7\}$	8	8	0	0
$\{3, 5\}$	8	8	0	0
$\{3, 7\}$	10	6	4	4
$\{5, 7\}$	12	4	8	8

Die möglichen Reste sind also 0, 3, 4, 7 und 8.

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe G 4 (9 Punkte)

Mit der Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 + 6}{2x + \sqrt{3}}$$

und einer Zahl $x_1 \geq \sqrt{3}$ kann man die Folge

$$x_1, \quad x_2 = f(x_1), \quad x_3 = f(x_2), \quad x_4 = f(x_3), \quad \dots$$

bilden. Dabei erhält man die nächste Zahl x_{k+1} der Folge dadurch, dass man die aktuelle Zahl x_k in die Funktion $f(x)$ einsetzt.

Zeigen Sie:

a) Für jedes $k \geq 1$ gilt $x_k \geq \sqrt{3}$.

b) Für jedes $k \geq 1$ gilt

$$x_{k+1} - \sqrt{3} \leq \frac{x_k - \sqrt{3}}{2}.$$

Lösung

a) Wir zeigen, dass $f(x) \geq \sqrt{3}$ für jedes $x \geq \sqrt{3}$ gilt. Wegen $x_1 \geq \sqrt{3}$ sind dann nacheinander $x_2 = f(x_1) \geq \sqrt{3}$, $x_3 = f(x_2) \geq \sqrt{3}$ und allgemein $x_{k+1} = f(x_k) \geq \sqrt{3}$.

Da $x > 0$ ist, gilt $2x + \sqrt{3} > 0$. Durch Äquivalenzumformungen erhält man

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{x^2 + 6}{2x + \sqrt{3}} \geq \sqrt{3} & \iff x^2 + 6 \geq 2\sqrt{3}x + 3 \\ & \iff x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 \geq 0 \\ & \iff (x - \sqrt{3})^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Diese letzte Aussage ist offensichtlich wahr.

b) Wie im ersten Teil zeigen wir wieder, dass allgemein für $x \geq \sqrt{3}$ gilt:

$$f(x) - \sqrt{3} \leq \frac{x - \sqrt{3}}{2}$$

Eine ähnliche Rechnung wie oben ergibt.

$$f(x) - \sqrt{3} = \frac{x^2 + 6}{2x + \sqrt{3}} - \sqrt{3} = \frac{(x - \sqrt{3})^2}{2x + \sqrt{3}} = \frac{x - \sqrt{3}}{2x + \sqrt{3}}(x - \sqrt{3}).$$

Wie müssen also zeigen, dass

$$\frac{x - \sqrt{3}}{2x + \sqrt{3}} \leq \frac{1}{2} \quad \text{für alle } x \geq \sqrt{3}$$

gilt. Wegen $x - \sqrt{3} < x + \frac{1}{2}\sqrt{3}$ gilt sogar

$$\frac{x - \sqrt{3}}{2x + \sqrt{3}} < \frac{x + \frac{1}{2}\sqrt{3}}{2x + \sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

(mit “<” statt “≤”).

Alternativ kann man auch wieder Äquivalenzumformungen verwenden:

$$\frac{x - \sqrt{3}}{2x + \sqrt{3}} \leq \frac{1}{2} \iff x - \sqrt{3} \leq x + \frac{\sqrt{3}}{2} \iff 0 \leq \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad (\text{wahre Aussage})$$

Kommentar: Die erste Aussage besagt, dass alle weiteren Zahlen der Folge $\geq \sqrt{3}$ sind, wenn die erste Zahl x_1 es ist ($x_1 > 0$ genügt hierfür schon).

Die zweite Aussage bedeutet, dass jede Zahl der Folge höchstens halb so weit von $\sqrt{3}$ entfernt ist wie die vorherige Zahl, falls diese Zahl $\geq \sqrt{3}$ ist (was laut der ersten Aussage stimmt). Man kann die Folge deshalb verwenden, um mit einem Computer eine beliebig genaue Schätzung der Zahl $\sqrt{3} = 1.732050807568877\dots$ zu berechnen. Dabei muss die allererste Zahl x_1 positiv sein, darf aber beliebig weit von $\sqrt{3}$ entfernt sein. Für $x_1 = 10$ erhält man z.B. die Folge

$$\begin{aligned} x_1 &= 10 \\ x_2 &= 4.877588449364481 \\ x_3 &= 2.593390663357448 \\ x_4 &= 1.839280804303966 \\ x_5 &= 1.734175940791399 \\ x_6 &= 1.732051675999936 \\ &\vdots \end{aligned}$$