Tag der Mathematik 2023

Gruppenwettbewerb

Allgemeine Hinweise:

Als Hilfsmittel dürfen nur Schreibzeug, Geodreieck und Zirkel benutzt werden. Elektronische Geräte sind nicht zugelassen.

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

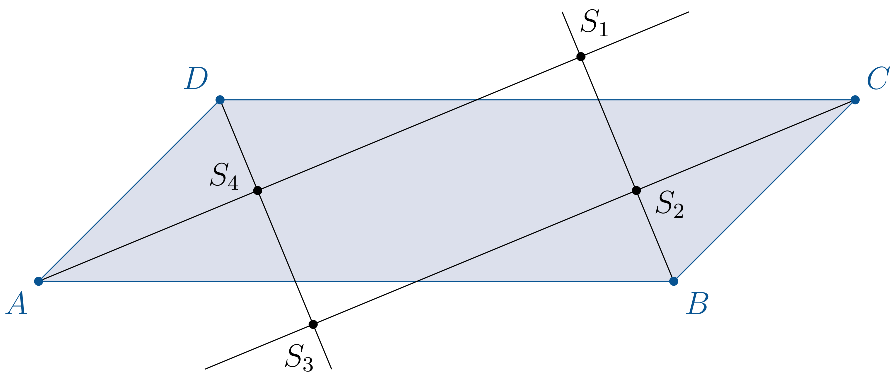
Die folgende Tabelle wird von den Korrektoren ausgefüllt.

Aufgabe	G 1	G 2	G 3	G 4	Summe
Mögliche Punktzahl	9	9	9	9	36
Erreichte Punktzahl					

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe G 1 (9 Punkte)

In einem Parallelogramm $ABCD$ mit $\overline{AB} > \overline{BC}$ seien die Winkelhalbierenden der Innenwinkel bei A, B, C und D konstruiert. Ihre Schnittpunkte seien wie in der Abbildung mit S_1, S_2, S_3 und S_4 bezeichnet.

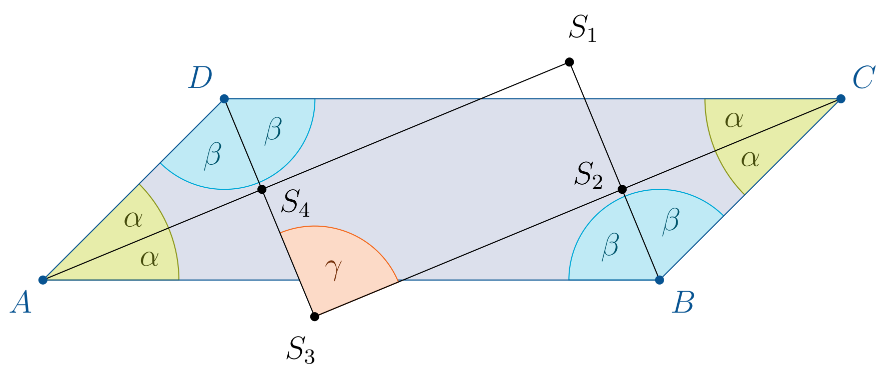


a) Beweisen Sie, dass das Viereck $S_1S_2S_3S_4$ unter diesen Voraussetzungen stets ein Rechteck ist.

b) Zusätzlich werde nun vorausgesetzt, dass der Punkt S_1 auf der Strecke CD liegt. Ermitteln Sie das Verhältnis $\overline{AB} : \overline{BC}$.

Lösung:

a) Gegenüberliegende Winkel im Parallelogramm sind gleich und damit auch alle mit α bezeichneten Winkel, und ebenso alle mit β bezeichneten Winkel.

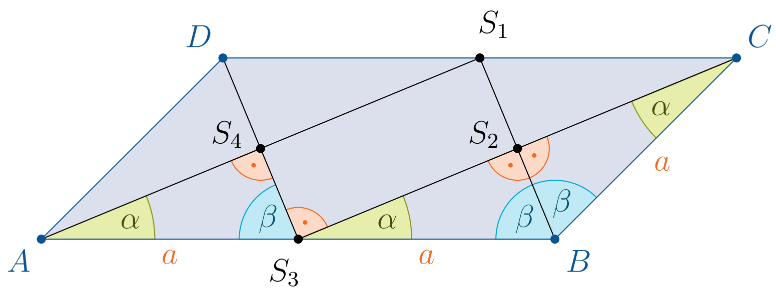


Also sind die Winkelhalbierenden durch die gegenüberliegenden Eckpunkte des Parallelogramms A und C parallel und ebenso die Winkelhalbierenden durch B und D. Das Viereck $S_1S_2S_3S_4$ ist also ein Parallelogramm, und es genügt zu zeigen, dass einer seiner Innenwinkel 90° ist.
Für die Winkelsumme des ursprünglichen Parallelogramms gilt

$$360° = 4\alpha + 4\beta \Rightarrow \alpha + \beta = 90°.$$

Damit ist das Dreieck CDS_3 rechtwinklig, also $\gamma = 90°$.

b) Aus Aufgabenteil a) wissen wir, dass alle kleinen Dreiecke in der Abbildung ähnlich sind. Da die Dreiecke S_3BS_2 und BCS_2 eine gemeinsame Seite haben, sind sie auch kongruent. Damit sind die Seiten S_3S_2 und S_2C gleich lang. Genauso sind die Seiten AS_4 und S_4S_1 gleich lang; Letztere liegt im Parallelogramm $S_1S_2S_3S_4$ der Seite S_3S_2 gegenüber und ist somit genauso lang wie diese. Also ist auch das Dreieck AS_3S_4 zu S_3BS_2 kongruent und alle mit a bezeichenten Seiten sind gleich lang.



Also gilt

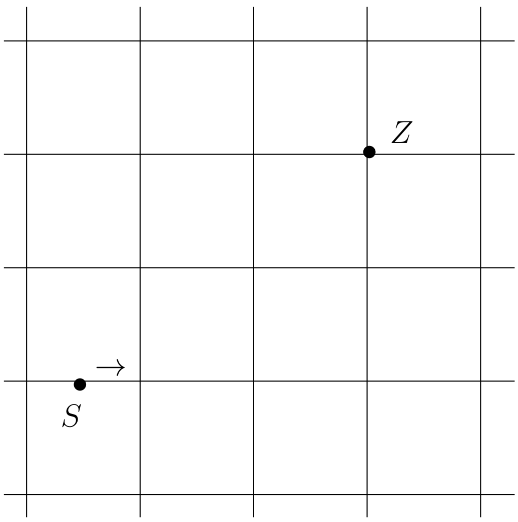
$$\overline{AB} : \overline{BC} = 2a : a = 2 : 1.$$

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe G 2 (9 Punkte)

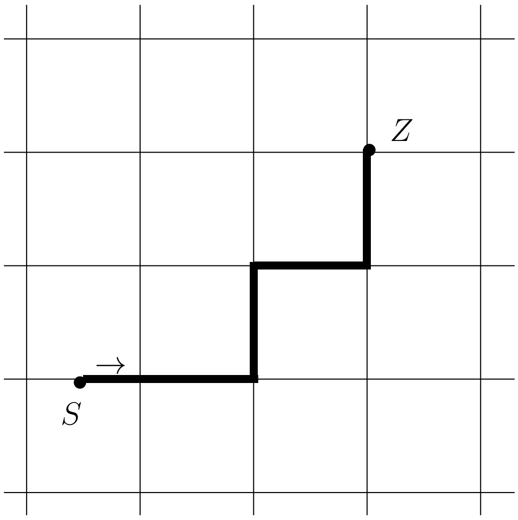
Markus ist in einer ihm unbekannten Stadt, deren Straßen in einem quadratischen Gitternetz angeordnet sind. Er befindet sich am Punkt S und möchte zum Punkt Z, dessen Position er aber nicht kennt. Aufgrund vager Hinweise geht er in Pfeilrichtung los und entscheidet an jeder Kreuzung folgendermaßen, wie er seinen Weg fortsetzt: Mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ geht er geradeaus weiter, mit Wahrscheinlichkeit $1/3$ biegt er nach links ab und mit Wahrscheinlichkeit $1/6$ biegt er nach rechts ab.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit erreicht er mit dieser Strategie das Ziel Z auf kürzestem Weg, also an der fünften Kreuzung?



Lösung:

Wir geben einen Weg im Gitternetz dadurch an, dass wir für jede durchlaufene Kreuzung G (für geradeaus), L (für Abbiegen nach links) oder R (für Abbiegen nach rechts) notieren.



Der eingezeichnete Weg ist in dieser Schreibweise $GLRL$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass Markus genau diesen Weg nimmt, ist das Produkt der Wahrscheinlichkeiten an den einzelnen Kreuzungen, also

$$p(GLRL) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{108}.$$

Außer diesem Weg gibt es noch 5 weitere Wege von S nach Z mit 4 Zwischenkreuzungen:

$GGLG$ mit Wahrscheinlichkeit $p(GGLG) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{24}$,

$GLGR$ mit Wahrscheinlichkeit $p(GLGR) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{72}$,

$LRGL$ mit Wahrscheinlichkeit $p(LRGL) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{108}$,

$LRLR$ mit Wahrscheinlichkeit $p(LRLR) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{324}$, und

$LGRG$ mit Wahrscheinlichkeit $p(LGRG) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{72}$.

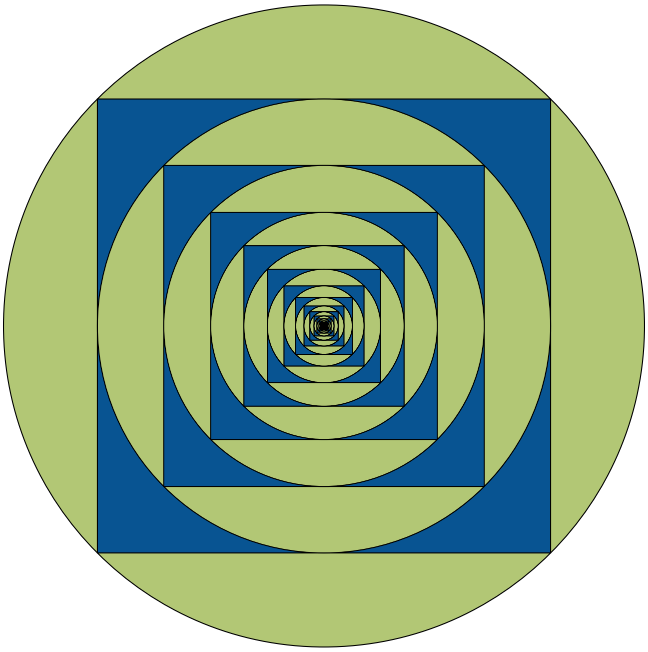
Die gesuchte Wahrscheinlichkeit p ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten für diese 6 Wege:

$$p = \frac{1}{24} + 2 \cdot \frac{1}{72} + 2 \cdot \frac{1}{108} + \frac{1}{324} = \frac{27 + 18 + 12 + 2}{648} = \frac{59}{648}.$$

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

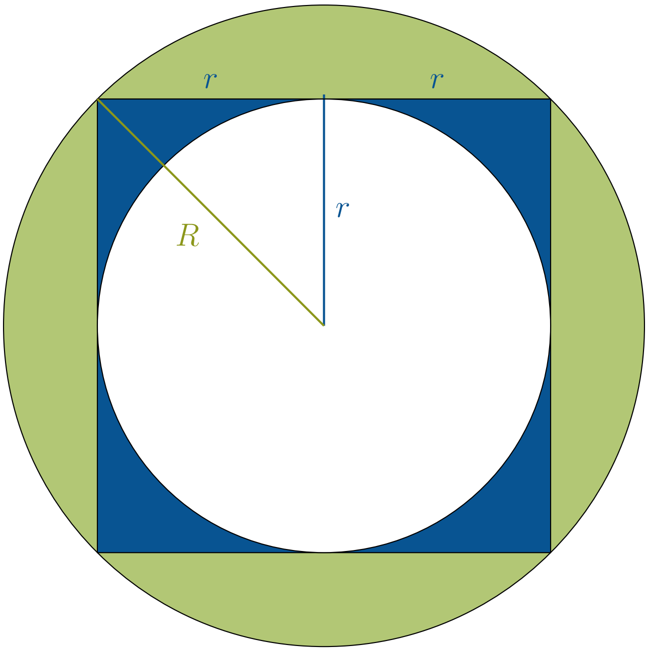
Aufgabe G 3 (9 Punkte)

In einen hellen Kreis mit Radius 1 Meter ist ein Quadrat einbeschrieben und dunkel gefärbt. In dieses Quadrat wird ein Kreis einbeschrieben und hell gefärbt. In diesen wieder ein dunkles Quadrat. Wir stellen uns vor, dass das immer so weiter geht.



Welcher Anteil der Fläche des großen Kreises ist dann hell gefärbt?

Lösung:



Die Flächeninhalte der hell und dunkel gefärbten Flächen eines jeden Kreisringes stehen immer im gleichen Verhältnis, daher sind die Färbungsanteile in jedem Ring gleich und damit auch im gesamten Kreis. Es genügt daher den hellen Anteil am äußersten Ring zu berechnen.
Wenn der äußerste Kreis den Radius $R = 1\text{m}$ hat und das Quadrat die Seitenlänge $2r$, dann hat der nächste Kreis den Radius r mit $r^2 + r^2 = R^2$ und es gilt:

$$F_K = R^2\pi \qquad \text{(Fläche großer Kreis)}$$
$$F_k = r^2\pi \qquad \text{(Fläche kleiner Kreis)}$$
$$F_Q = (2r)^2 \qquad \text{(Fläche Quadrat)}$$
$$F_h = F_K - F_Q = R^2\pi - 4r^2 = \pi - 2 \qquad \text{(helle Fläche)}$$
$$F_d = F_Q - F_k = 4r^2 - r^2\pi = r^2(4-\pi) = 2 - \frac{\pi}{2} \qquad \text{(dunkle Fläche)}$$
$$\frac{F_h}{F_h + F_d} = \frac{\pi - 2}{\pi/2} = 2 - \frac{4}{\pi} \qquad \text{(Anteil helle Fläche)}$$

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe G 4 (9 Punkte)

Der Weihnachtsmann hat von seinen Wichteln eine Lichterkette mit 365 Lämpchen geschenkt bekommen. Die Lämpchen sind alle von 1 bis 365 nummeriert und können einzeln ein- und ausgeschaltet werden. An Heiligabend (24.12.) wird die Kette überreicht und alle Lämpchen leuchten. Am darauffolgenden ersten Weihnachtsfeiertag (25.12.) werden zunächst alle Lämpchen ausgeknipst. Am zweiten Tag nach Heiligabend wird jedes zweite Lämpchen wieder eingeschaltet. Am dritten Tag wird jedes dritte Lämpchen umgeschaltet, also ausgeknipst, wenn es leuchtete und angeknipst, wenn es aus war. Und so weiter. Am k-ten Tag nach Heiligabend wird jedes Lämpchen, dessen Nummer durch k teilbar ist, umgeschaltet.

a) Brennt das Lämpchen mit der Nummer 24 am nächsten Heiligabend?

b) Brennt das Lämpchen mit der Nummer 144 am nächsten Heiligabend?

c) Wieviele Lämpchen leuchten am nächsten Heiligabend **nicht**?

Lösung:
Das Lämpchen mit der Nummer n leuchtet an Heiligabend, wenn n durch eine gerade Anzahl von natürlichen Zahlen teilbar ist: denn dann wird das Lämpchen eine gerade Anzahl von Malen umgeschaltet, ist am Ende also an.

a) Lämpchen 24 wird an den Tagen 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 und 24 umgeschaltet, also achtmal; es leuchtet also an Heiligabend.

b) $144 = 2^4 \cdot 3^2$ ist durch alle Zahlen der Form $2^i \cdot 3^j$ mit $0 \leq i \leq 4$ und $0 \leq j \leq 2$ teilbar. Für i gibt es also 5 Möglichkeiten, für j 3.
Lämpchen 144 wird also $5 \cdot 3 = 15$ mal umgeschaltet und leuchtet damit am nächsten Heiligabend nicht.

c) Ist d ein Teiler von n, so ist auch $\frac{n}{d}$ ein Teiler von n. Die Anzahl der Teiler von n ist also gerade, es sei denn in einem Teilerpaar sind beide Teiler gleich. Das ist genau dann der Fall, wenn $\frac{n}{d} = d$ ist, also wenn $n = d^2$ eine Quadratzahl ist.
Da $19^2 = 361 < 365$ und $20^2 = 400 > 365$, brennen am nächsten Heiligabend genau die 19 Birnchen mit den Nummern der ersten 19 Quadratzahlen nicht.