Aufgabe G 1 (9 Punkte)

Ersetzen Sie in der folgenden Rechnung die Buchstaben durch Ziffern:

$$\begin{array}{ccccccc} & Z & E & R & O & E & S \\ + & & & O & N & E & S \\ \hline & B & I & N & A & R & Y \end{array}$$

Dabei entsprechen gleiche Buchstaben gleichen Ziffern und verschiedene Buchstaben verschiedenen Ziffern. Außerdem ist die erste Ziffer einer Zahl immer ungleich 0.

Lösung:
Bei den ersten beiden Stellen muss es einen Übertrag geben, was R+O$\geq$ 10 und E+1 $\geq$ 10 erzwingt. Also ist E=9, I=0.
An der Zehnerstelle sieht man daher R=8 (da die 9 schon vergeben ist) und die Einerstelle liefert S<4 da es keinen Übertrag gibt, und S=4 zu Y=8=R führen würde.
Nun unterscheiden wir zwei Fälle, die sich von den Hunderterstellen ergeben:
<u>Fall 1:</u> O+N +1 =A (die 1 ist vom Übertrag der Zehnerstellen), das heißt wir haben keinen Übertrag auf die Tausenderstellen, also 8+O=N+10.
Dann ist O=N+2, 2N+3=A. Da A höchstens 7 ist, ist N=1 oder N=2.
Für N=2 ist A=7, O=4, damit Y=6 (die einzige gerade Ziffer, die noch frei ist), und damit müssen Z und B beide ungerade sein, was nicht geht.
Für N=1 ist A=5, O=3, B=7 (einzig übrige ungerade Ziffer), Z=6, S=2, Y=4: **das ist eine Lösung!**

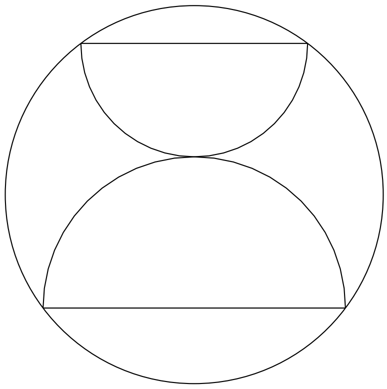
<u>Fall 2:</u> O+N+1=A+10, hier gibt es einen Übertrag auf die Tausenderstelle, also 8+O+1=N+10, was O=N+1 und A=2N-8 bewirkt.
Hier ist N>4, da sonst A negativ oder A=0=I wäre. Keiner dieser Werte von N ist möglich:
N=5: A=2, O=6, und S kann in diesem Fall weder 1 noch 2 noch 3 sein.
N=6: A=4 erzwingt Y=2, sodass Z und B beide ungerade sein müssen.
N=7: hier ist O=8=R - Widerspruch!

Die Lösung sieht also so aus:

$$\begin{array}{ccccccc} & 6 & 9 & 8 & 3 & 9 & 2 \\ + & & & 3 & 1 & 9 & 2 \\ \hline & 7 & 0 & 1 & 5 & 8 & 4 \end{array}$$

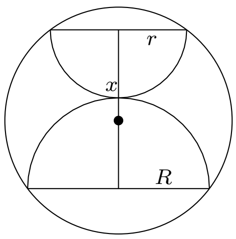
Aufgabe G 2 (9 Punkte)

In einen Kreis vom Radius 1 werden zwei Halbkreise wie in der Skizze eingezeichnet.



Welche Fläche haben die beiden Halbkreise zusammen?

Lösung:
Wir bezeichnen die beiden Radien der kleineren Halbkreise mit r und R und den Abstand der oberen Sehne zum Mittelpunkt des großen Kreises mit x.



Dann folgt aus dem Satz des Pythagoras

$$r^2 + x^2 = 1 = R^2 + (R + r - x)^2.$$

Wir lösen die Klammer im rechten Ausdruck auf:

$$R^2 + (R + r - x)^2 = 2R^2 + 2Rr - 2Rx - 2rx + r^2 + x^2.$$

Die Gleichheit dieses Ausdruckes mit $r^2 + x^2$ erzwingt

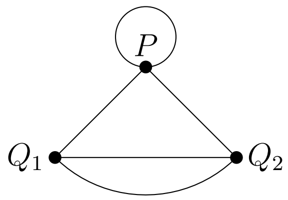
$$0 = R^2 + Rr - Rx - rx = (R + r)(R - x),$$

und es folgt $R = x$.
Damit ist $r^2 + R^2 = 1$, und die Summe der Flächeninhalte der Halbkreise ist

$$\frac{1}{2}(r^2\pi + R^2\pi) = \frac{\pi}{2}.$$

Aufgabe G 3 (9 Punkte)

Ein *Graph* besteht aus Ecken und Kanten zwischen manchen Ecken. Zwischen zwei Ecken darf es mehrere Kanten geben; eine Kante kann auch eine Ecke mit sich selbst verbinden ("Schleife"). Ein Graph heißt *zusammenhängend*, wenn je zwei Ecken durch einen Kantenzug verbunden sind.
Für eine Ecke P sei $\text{ord}(P)$ die Anzahl der Kanten an P. Dabei zählt jede Kante an beiden Endpunkten mit, eine Schleife zählt also doppelt.
Abgebildet ist ein zusammenhängender Graph mit 3 Ecken und 5 Kanten mit $\text{ord}(Q_1) = \text{ord}(Q_2) = 3$ und $\text{ord}(P) = 4$.

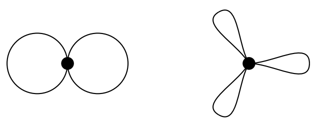


Bestimmen Sie alle zusammenhängenden Graphen G mit folgenden Eigenschaften:

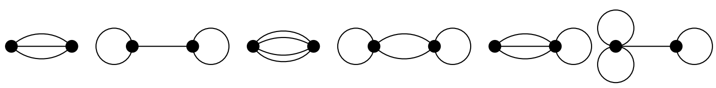
(i) $\text{ord}(P) \geq 3$ für jede Ecke P von G,

(ii) G hat höchstens 2 Kanten mehr als Ecken.

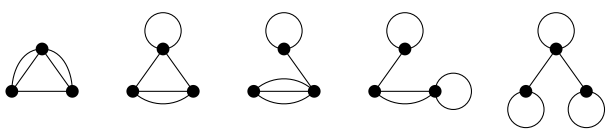
Lösung:
Die Anzahl k der Kanten solch eines Graphen und die Anzahl e seiner Ecken sind durch die Bedingungen $k \leq e + 2$ und $2k \geq 3e$ verbunden. Das führt zusammen auf $e \leq 4$. Folgende Graphen sind möglich:
$e = 1$: 2 Möglichkeiten



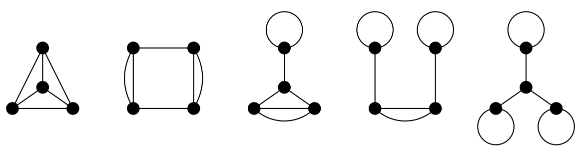
$e = 2$: 6 Möglichkeiten



$e = 3$: 5 Möglichkeiten



$e = 4$: 5 Möglichkeiten



Aufgabe G 4 (9 Punkte)

Seien $0 < b \leq a$ ganze Zahlen, sodass auch

$$c = \frac{a^2 + b^2}{ab + 1}$$

eine ganze Zahl ist.

(a) Zeigen Sie: Mit denselben Werten für b und c gibt es eine weitere ganze Zahl $\tilde{a} \neq a$ mit $c = \frac{\tilde{a}^2+b^2}{\tilde{a}b+1}$.

(b) Für $\tilde{a}$ aus (a) gilt $0 \leq \tilde{a} < b$.

(c) Folgern Sie, dass c ein Quadrat sein muss.

(d) Ein mögliches Zahlenpaar, das die obigen Bedingungen erfüllt, ist $a = b = 1$.

Finden Sie ein Beispiel mit $b \geq 2$.

Hinweis: Sie können (d) auch lösen ohne vorher alle Teile bearbeitet zu haben.

Lösung:

(a) Es gilt ja $a^2 + b^2 - c(ab+1) = 0$, also ist bei festen Werten b, c die Zahl a Lösung einer quadratischen Gleichung. Das Produkt der beiden Lösungen ist nach den Vietaschen Formeln gerade der konstante Term $b^2 - c$, also erfüllt auch

$$\frac{b^2 - c}{a} = \tilde{a} = \frac{bca - a^2}{a} = bc - a$$

die Bedingung und ist ganz.

(b) Wäre $\tilde{a}$ negativ, so wäre

$$\tilde{a}b + 1 \leq \tilde{a}b + b = (\tilde{a} + 1)b \leq 0,$$

was $\tilde{a}^2 + b^2 = c \cdot (\tilde{a}b + 1) \leq 0$ bedeutet und unmöglich ist. Also ist $\tilde{a} \geq 0$.

Da $a \cdot \tilde{a} = b^2 - c < b^2$ gilt und $a \geq b$ vorausgesetzt ist, folgt $\tilde{a} < b$.

(c) Wenn nun $\tilde{a} \neq 0$ ist, so wiederhole man das bisherige Verfahren mit $\tilde{a}$ in der Rolle des bisherigen b und b in der Rolle des bisherigen a und findet ein $\tilde{b}$ mit $0 \leq \tilde{b} < \tilde{a}$, sodass

$$c = \frac{\tilde{a}^2 + \tilde{b}^2}{\tilde{a}\tilde{b} + 1}$$

mit dem selben c.

Nach spätestens b Wiederholungen dieses Vorgehens ist eine der beiden Partnerzahlen 0, denn mehr nicht negative ganze Zahlen unterhalb von b gibt es nicht. Das heißt man hat dann Zahlen

$$0 = \hat{b} < \hat{a} \quad \text{mit} \quad c = \frac{\hat{a}^2 + \hat{b}^2}{\hat{a}\hat{b} + 1} = \frac{\hat{a}^2}{1},$$

also ist c ein Quadrat.

(d) In Umkehrung des eben gemachten Prozesses starten wir jetzt bei $b = 2, \tilde{a} = 0, c = 4$ und suchen das passende a, also

$$a^2 + 4 = 4(2a + 1).$$

Das führt auf $a = 8$, und tatsächlich leisten $a = 8, b = 2$ das gewünschte.

Allgemeiner ist für jedes $b > 0$ die Zahl $a = b^3$ ein passender Partner.