Karlsruher Institut für Technologie

Zentrum für Mathematik

Tag der Mathematik 2026

Gruppenwettbewerb

Allgemeine Hinweise:

Die Bearbeitungszeit beträgt 45 Minuten.

Als Hilfsmittel dürfen nur Schreibzeug, Geodreieck und Zirkel benutzt werden. Elektronische Geräte sind nicht zugelassen.

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

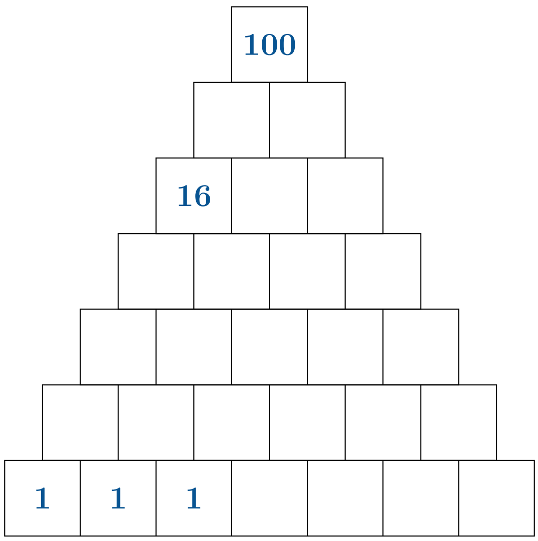
Die folgende Tabelle wird von den Korrektoren ausgefüllt.

Aufgabe	G 1	G 2	G 3	G 4	Summe
Mögliche Punktzahl	9	9	9	9	36
Erreichte Punktzahl					

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe G 1 (9 Punkte)

In die abgebildete Additionspyramide soll in jedes Quadrat eine natürliche Zahl geschrieben werden, so dass folgende Regel erfüllt ist: Die Summe zweier benachbarter Zahlen in einer Reihe steht im darüber liegenden Quadrat.



Fünf Zahlen sind bereits eingetragen.

a) Füllen Sie die Additionspyramide aus, so dass die Regel erfüllt ist.

b) Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es dafür?

(Hinweis: Natürliche Zahlen sind die Zahlen 1, 2, 3, 4,...)

Lösung

a) Das folgende Bild zeigt eine mögliche Lösung: 3*

100						
32	68					
16	16	52				
8	8	8	44			
4	4	4	4	40		
2	2	2	2	2	38	
1	1	1	1	1	1	37

**Hinweis für die Bepunktung: Je 1 pro vollständig korrekter Farbgruppe (grün, orange, hellblau).*

Es gibt sechs weitere Lösungen, die im Folgenden gezeigt werden:

100						
33	67					
16	17	53				
8	8	9	41			
4	4	4	5	36		
2	2	2	2	3	33	
1	1	1	1	1	2	31

100						
34	67					
16	18	48				
8	8	10	38			
4	4	4	6	32		
2	2	2	2	4	28	
1	1	1	1	1	3	25

100						
35	65					
16	19	46				
8	8	11	35			
4	4	4	7	28		
2	2	2	2	5	23	
1	1	1	1	1	4	19

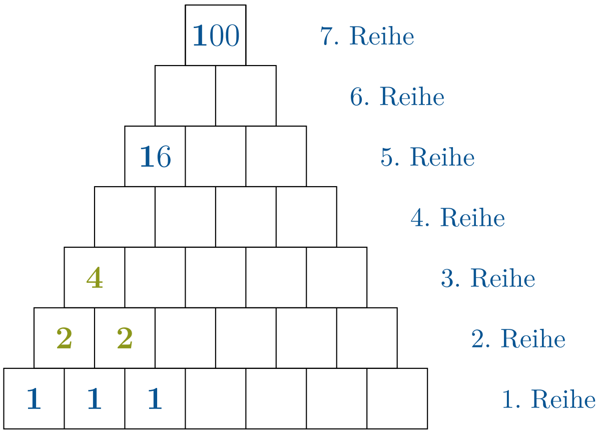
100						
36	64					
16	20	44				
8	8	12	32			
4	4	4	8	24		
2	2	2	2	6	18	
1	1	1	1	1	5	13

100						
37	63					
16	21	42				
8	8	13	29			
4	4	4	9	20		
2	2	2	2	7	13	
1	1	1	1	1	6	7

100						
38	62					
16	22	40				
8	8	14	26			
4	4	4	10	16		
2	2	2	2	8	8	
1	1	1	1	1	7	1

b) Wir nummerieren die Reihen unserer Additionspyramide von unten nach oben durch. Die unterste Reihe aus sieben Quadraten ist also Reihe 1, die zweitunterste Reihe aus sechs Quadraten ist Reihe 2 usw. Die Reihen selbst betrachten wir jeweils von links

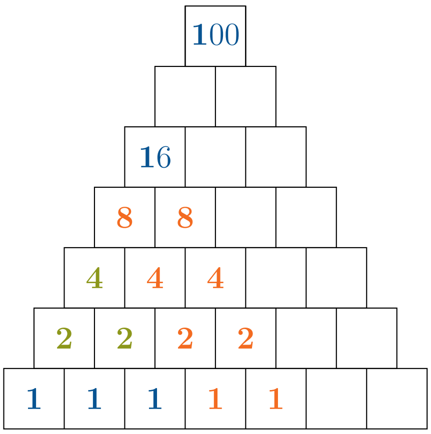
nach rechts.
Aus den drei Einsen in der ersten Reihe erhalten wir nach der Spielregel die grünen Zahlen in der zweiten und dritten Reihe.



Weiterhin stellen wir fest: Nach Spielregel sind die Zahlen in den Quadraten von Reihe 1 mindestens 1, von Reihe 2 mindestens $1 + 1 = 2$. Daraus folgt, dass die Zahlen in Reihe 3 mindestens $2 + 2 = 4$ und in Reihe 4 mindestens $4 + 4 = 8$ sind.
Daraus folgt, dass auch die Zahlen im vierten und fünften Quadrat in Reihe 1 gleich 1 sein müssen: Wäre eine größer als 1, dann wäre eine der ersten beiden Zahlen in Reihe 4 größer als 8. Beide Zahlen sind mindestens 8. Also wäre ihre Summe größer als 16. 1

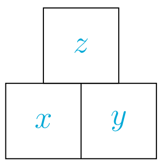
Daraus erhalten wir nun die orangefarbenen Zahlen in der abgebildeten Pyramide.

1



Um die möglichen Zahlen in den restlichen Kästchen zu bestimmen geben wir drei alternative Wege an und verwenden die folgende Vorüberlegung.

Vorüberlegung: In einer Teilpyramide aus drei Quadraten mit den Einträgen x, y und z wie im Bild, ergeben sich die Einträge der unteren Reihe als $x = z - y$ und $y = z - x$.



1

Alternative 1:

Wir bezeichnen den Eintrag in Reihe 1 im sechsten Quadrat mit x (s. Bild unten). Durch Anwenden der Regel erhalten wir zunächst die hellblauen Werte in der Pyramide. Aus diesen ergeben sich wiederum die braunen Werte. Aus 1

$$43 - 6x \geq 1$$ 1

folgt $x \leq 7$. Somit kann x nur die Werte $1, \ldots, 7$ annehmen. Umgekehrt erhalten wir für die Wahl von x in $\{1, \ldots, 7\}$ eine Lösung wie in der Additionspyramide angegeben. Also erhalten wir sieben Lösungen. 1

100						
$31+x$	$69-x$					
16	$15+x$	$54-2x$				
8	8	$7+x$	$47-3x$			
4	4	4	$3+x$	$44-4x$		
2	2	2	2	$1+x$	$43-5x$	
1	1	1	1	1	x	$43-6x$

Alternative 2:

Wir bezeichnen die Einträge in Reihe 1 im sechsten und im siebenten Quadrat mit x und y (s. Bild). Durch Anwenden der Regel erhalten wir die hellblauen Werte in der Pyramide. 1

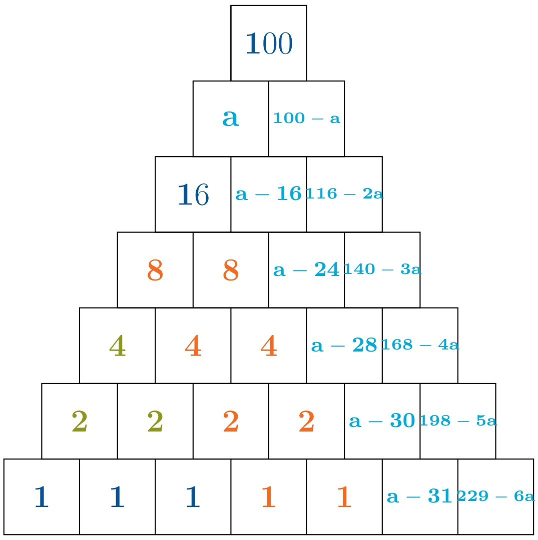
100						
$31+x$	$26+5x+y$					
16	$15+x$	$11+4x+y$				
8	8	$7+x$	$4+3x+y$			
4	4	4	$3+x$	$1+2x+y$		
2	2	2	2	$1+x$	$x+y$	
1	1	1	1	1	x	y

Um 100 zu erreichen, muss

$$(31 + x) + (26 + 5x + y) = 100$$ 1

und somit $y = 43 - 6x$ gelten. Da $y \geq 1$ ist, kann x nur die Werte $1, \ldots, 7$ annehmen. Umgekehrt erhalten wir für die Wahl von x in $\{1, \ldots, 7\}$ und $y = 43 - 6x$ eine Lösung wie in der Additionspyramide angegeben. Wiederum sehen wir, dass es sieben Lösungen gibt. 1

Alternative 3:
Wir bezeichnen die Zahl im ersten Quadrat in Reihe 6 mit a (s. Bild). Dann ist die Zahl im zweiten Quadrat gleich $100 - a$. Schrittweise erhalten wir so die hellblauen Werte im Bild der Additionspyramide. 1



Die Werte $a - 31$ und $229 - 6a$ aus der ersten Reihe müssen beide mindestens 1 sein. Das ergibt die Ungleichungen

$$a - 31 \geq 1 \qquad \text{und} \qquad 229 - 6a \geq 1.$$ 1

Diese sind äquivalent zu

$$a \geq 32 \qquad \text{und} \qquad a \leq \frac{228}{6} = 38.$$

Somit kommen nur die Zahlen $32, \ldots, 38$ für a in Frage.
Umgekehrt erhalten wir für die Wahl von a in $\{32, \ldots, 38\}$ eine Lösung wie in der Additionspyramide angegeben. Also erhalten wir $38 - 31 = 7$ Lösungen. 1

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe G 2 (9 Punkte)

Nina trainiert für einen Marathon.
An jedem Trainingstag beginnt sie mit einer ersten Teilstrecke von 8 Kilometern.
Am Ende jeder Teilstrecke wirft sie eine Münze. Bei Kopf beendet sie das Training für diesen Tag, bei Zahl läuft sie eine weitere Teilstrecke, die aber nur halb so lang ist wie die vorhergehende. Das wiederholt sie solange, bis irgendwann Kopf kommt.
(Die Münze zeigt jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ Kopf bzw. Zahl.)

a) Wie weit läuft Nina, wenn sie drei mal Zahl und dann Kopf wirft?

b) Zeigen Sie, dass Nina nie weiter als 16 Kilometer läuft, egal wie oft Zahl kommt.

c) Nach einigen Tagen behält Nina zwar die Trainingsmethode bei, variiert aber, abhängig von ihrer gefühlten Tagesform, die Länge der ersten Startstrecke und startet nun statt mit 8 Kilometern auch mal mit 4, 12 oder 16 Kilometern.

Wie weit läuft Nina in den drei Fällen jeweils, wenn sie drei mal Zahl und dann Kopf wirft?

d) Wie weit läuft Nina an einem Trainingstag durchschnittlich, wenn sie mit 16 Kilometern startet?

Lösung

a) Nina läuft

$$\Big(8 + 4 + 2 + 1\Big)\text{km} = 15\,\text{km}.$$ 1

b) Selbst wenn Nina nie Kopf wirft, läuft sie maximal eine Gesamtstrecke von

$$S_{max} = 8 \cdot \left(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \cdots + \tfrac{1}{2^n} + \cdots\right)\,\text{km}.$$ 1

Die Klammer ist eine geometrische Reihe mit Startwert 1 und Faktor $\frac{1}{2}$, also gilt

$$S_{max} = 8 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}}\,\text{km} = 16\,\text{km}. \qquad \boxed{1}$$

c) Ist die Startstrecke um den Faktor f größer (oder kleiner) als 8 Kilometer, so gilt dies auch für die zweite und alle folgenden Teilstrecken. Bei gleicher Münzwurfserie ist dann die gesamte Trainingsstrecke auch um den Faktor f größer (oder kleiner). $\boxed{1}$

Daher gilt:

Startstrecke 4 Kilometer $\Rightarrow$ Gesamtstrecke $S_4 = \frac{4}{8} \cdot 15\,\text{km} = 7,5\,\text{km}$
Startstrecke 12 Kilometer $\Rightarrow$ Gesamtstrecke $S_{12} = \frac{12}{8} \cdot 15\,\text{km} = 22,5\,\text{km}$
Startstrecke 16 Kilometer $\Rightarrow$ Gesamtstrecke $S_{16} = \frac{16}{8} \cdot 15\,\text{km} = 30\,\text{km}$. $\boxed{1}$

d) Gesucht ist die durchschnittliche Trainingsstreckenlänge L_{16}, wenn Nina mit 16 Kilometern startet und dann immer halbiert.

Nach der ersten Teilstrecke von 16 Kilometern hört Nina mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ auf, und mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ macht sie weiter. $\boxed{1}$

In diesem Fall läuft sie danach durchschnittlich noch so weit, wie an einem Tag, an dem sie mit 8 Kilometern begonnen hat, also L_8. Also gilt:

$$L_{16} = 16\,\text{km} + \tfrac{1}{2} L_8 \qquad \boxed{1}$$

Bei gleicher Münzwurfserie ist die Gesamtstrecke proportional zur Startstrecke, daher gilt

$$\begin{aligned} L_8 &= \tfrac{1}{2} L_{16} && \boxed{1} \\ \Rightarrow L_{16} &= 16\,\text{km} + \tfrac{1}{4} L_{16} \\ \Rightarrow L_{16} &= \tfrac{64}{3}\,\text{km}\ . && \boxed{1} \end{aligned}$$

Alternative Lösung:

b) Wenn Nina n mal Zahl wirft, bevor Kopf kommt, läuft sie

$$8 \cdot \left(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \cdots + \tfrac{1}{2^n}\right)\,\text{km} \qquad \boxed{1}$$

Der letzte Summand in der Klammer ist immer gerade das, was der Summe in der Klammer zum Wert 2 fehlt:

$$\begin{aligned} 1 + \tfrac{1}{2} &= 2 - \tfrac{1}{2} \\ 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} &= 2 - \tfrac{1}{4} \\ 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} &= 2 - \tfrac{1}{8} \\ &\vdots \\ 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \cdots + \tfrac{1}{2^n} &= 2 - \tfrac{1}{2^n} \end{aligned}$$

Dieser Abstand zum Wert 2 wird durch jeden weiteren Summanden halbiert. Nina läuft also nie weiter als $8 \cdot \left(2 - \frac{1}{2^n}\right)\,\text{km} < 16\,\text{km}$. 1

c) Führe die Rechnungen von a) mit 3 verschiedenen Startstrecken durch. 2

d) Nina startet mit einer Startstrecke von 16 Kilometern.

Mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ hängt sie noch 8 Kilometer dran. 1

Mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$ hängt sie nochmal 4 Kilometer dran usw.

$$\begin{aligned} L_{16} &= 16\,\text{km} + \tfrac{1}{2} \cdot 8\,\text{km} + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 \cdot 4\,\text{km} + \left(\tfrac{1}{2}\right)^3 \cdot 2\,\text{km} + \cdots + \left(\tfrac{1}{2}\right)^n \left(2^{4-n}\right)\,\text{km} + \cdots \\ &= 16 \cdot \left(1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4^2} + \tfrac{1}{4^3} + \cdots\right)\,\text{km}. \end{aligned}$$ 1

Der Term in der Klammer ist eine geometrische Reihe mit Faktor $\frac{1}{4}$. 1

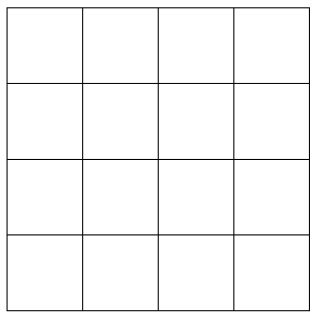
Daraus folgt

$$L_{16} = 16 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4}}\,\text{km} = \frac{64}{3}\,\text{km}.$$ 1

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe G 3 (9 Punkte)

Gegeben ist ein quadratisches $(n \times n)$-Raster aus gleichgroßen Quadraten.



In das Raster wird genau ein Rechteck eingezeichnet. Die Seiten des Rechtecks verlaufen parallel zu den Gitterlinien, und die Eckpunkte des Rechtecks liegen auf den Gitterpunkten des Rasters.
Zwei Rechtecke gelten als unterschiedlich, wenn sie sich in Lage oder Größe unterscheiden.
Wie viele Möglichkeiten gibt es, ein solches Rechteck…

a) …in ein (4×4)-Raster einzuzeichnen?

b) …in ein (8×8)-Raster einzuzeichnen?

c) …in ein $(n \times n)$-Raster einzuzeichnen?

Lösung

a) Wir beschriften die Gitterquadrate wie abgebildet und zählen für jeden Buchstaben, wie viele Rechtecke es gibt, die diesen Buchstaben im linken oberen Teilquadrat haben.

a	b	c	d
e	f	g	h
i	j	k	l
m	n	o	p

Für a gibt es $4 \cdot 4$ Möglichkeiten, für b $4 \cdot 3$, für c $4 \cdot 2$, für d $4 \cdot 1$.

Für e gibt es $3 \cdot 4$ Möglichkeiten, für f $3 \cdot 3$, für g $3 \cdot 2$, für h $3 \cdot 1$.

Für i gibt es $2 \cdot 4$ Möglichkeiten, für j $2 \cdot 3$, für k $2 \cdot 2$, für l $2 \cdot 1$.

Für m gibt es $1 \cdot 4$ Möglichkeiten, für n $1 \cdot 3$, für o $1 \cdot 2$, für p $1 \cdot 1$. 2

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}
4 \cdot (4+3+2+1) &= 4 \cdot 5 \cdot \tfrac{4}{2} = 40 && \text{(1. Zeile)}\\
3 \cdot (4+3+2+1) &= 3 \cdot 5 \cdot \tfrac{4}{2} = 30 && \text{(2. Zeile)}\\
2 \cdot (4+3+2+1) &= 2 \cdot 5 \cdot \tfrac{4}{2} = 20 && \text{(3. Zeile)}\\
1 \cdot (4+3+2+1) &= 1 \cdot 5 \cdot \tfrac{4}{2} = 10. && \text{(4. Zeile)}
\end{aligned}$$ 1

Insgesamt liegt die Anzahl der Möglichkeiten also bei

$$(4+3+2+1) \cdot (4+3+2+1) = \left(5 \cdot \tfrac{4}{2}\right)\left(5 \cdot \tfrac{4}{2}\right) = 100.$$ 0,5 0,5

b) Der Buchstabe bezeichnet erneut das linke obere Teilquadrat des Rechtecks.

a	b	c	$\cdots$				
i	j	$\cdots$					
q	$\cdots$						

Für a gibt es $8 \cdot 8$ Möglichkeiten, für b $8 \cdot 7, \ldots,$ für h $8 \cdot 1$.

Für i gibt es $7 \cdot 8$ Möglichkeiten, für j $7 \cdot 7, \ldots,$ für k $7 \cdot 1$. 1

Wird dieses Muster für alle Felder fortgesetzt, so ergibt sich

$$
\begin{aligned}
8 \cdot (8+7+6+5+4+3+2+1) &= 8 \cdot 9 \cdot \tfrac{8}{2} = 288 && \text{(1. Zeile)}\\
7 \cdot (8+7+6+5+4+3+2+1) &= 7 \cdot 9 \cdot \tfrac{8}{2} = 252 && \text{(2. Zeile)}\\
&\vdots\\
1 \cdot (8+7+6+5+4+3+2+1) &= 1 \cdot 9 \cdot \tfrac{8}{2} = 36. && \text{(8. Zeile)}
\end{aligned}
$$
1

Insgesamt liegt die Anzahl der Möglichkeiten also bei

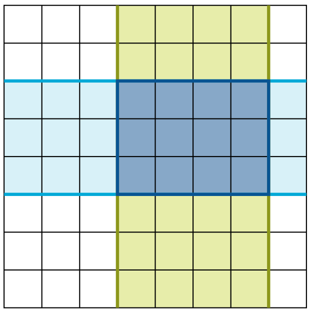
$$(8+7+6+5+4+3+2+1) \cdot (8+7+6+5+4+3+2+1) = \left(9 \cdot \tfrac{8}{2}\right)\left(9 \cdot \tfrac{8}{2}\right) = 36^2$$
0,5 0,5

c) Analog zu a) und b) liegt die Anzahl der Möglichkeiten insgesamt bei

$$
\begin{aligned}
&\Big(n + (n-1) + \cdots + 2 + 1\Big) \cdot \Big(n + (n-1) + \cdots + 2 + 1\Big)\\
=& \left((n+1) \cdot \tfrac{n}{2}\right)\left((n+1) \cdot \tfrac{n}{2}\right)\\
=& (n+1)^2 \cdot \tfrac{n^2}{4}.
\end{aligned}
$$
1 1

Alternative Lösung:
Man zählt für jede Rechtecksgröße, wie viele Rechtecke dieser Größe man in dem Raster unterbringen kann:
Für Rechtecke der Größe 1×1 gibt es im (4×4)-Quadrat $4 \cdot 4$ Möglichkeiten, für die Größe 1×2 sind es $4 \cdot 3$, für 1×3 noch $4 \cdot 2$ und für 1×4 nur $4 \cdot 1$.
Für Rechtecke der Größe $2 \times n$ erhält man nacheinander $3 \cdot 4, 3 \cdot 3, 3 \cdot 2$ und $3 \cdot 1$ Möglichkeiten usw. 2
Diese Art zu zählen führt also auf die gleiche Rechnung wie oben:
Es gibt $(4+3+2+1) \cdot (4+3+2+1)$ Rechtecke im (4×4)-Quadrat. 2
Für das (8×8)- und das $(n \times n)$-Quadrat erhält man die gleichen Ausdrücke wie oben. 3* 2*
**Hinweis für die Bepunktung: Die Verteilung der Punkte erfolgt analog zur vorherigen Lösung von a), b) bzw. c).*

Weitere alternative Lösung (exemplarisch für Teil b) Verlängert man die Seiten eines beliebigen, entlang der Gitternetzlinien verlaufenden Rechtecks innerhalb des 8×8 Gitternetzes, so erhalten wir einen waagerechten und einen senkrechten Streifen, deren Schnitt gerade das Rechteck erzeugt.



Umgekehrt erzeugen verschiedene Streifen auf eindeutige Weise verschiedene Rechtecke. $\boxed{3}$
Es genügt also, die Zahl der verschiedenen möglichen waagerechten/senkrechten Streifen zu bestimmen.
Jeder Streifen wird durch zwei parallele Linien des Gitters eindeutig festgelegt. $\boxed{1{,}5}$
Das Gitter hat je 9 waagerechte und senkrechte Linien, aus denen wir jeweils zwei auswählen. Dafür gibt es

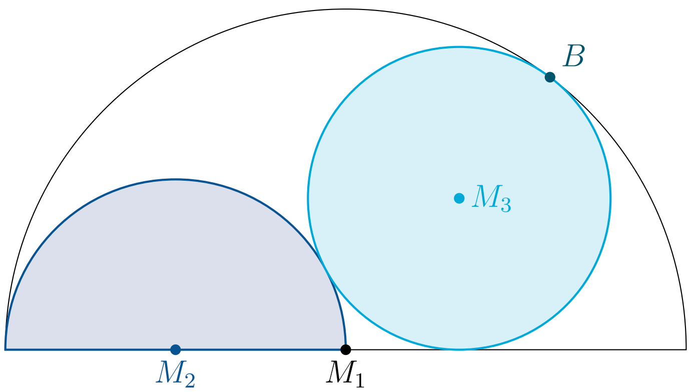
$$\binom{9}{2} = \frac{9!}{2! \cdot (9-2)!} = \frac{9 \cdot 8}{2} = 36$$

Möglichkeiten in jeder Richtung. Insgesamt gibt es also 36^2 verschiedene Rechtecke. $\boxed{0{,}5^*}$

**Hinweis für die Bepunktung: Jeweils* $\boxed{1}$ *für die richtige Anzahl an Streifen und* $\boxed{0{,}5}$ *für das richtige Endergebnis in a), b) und c).*

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

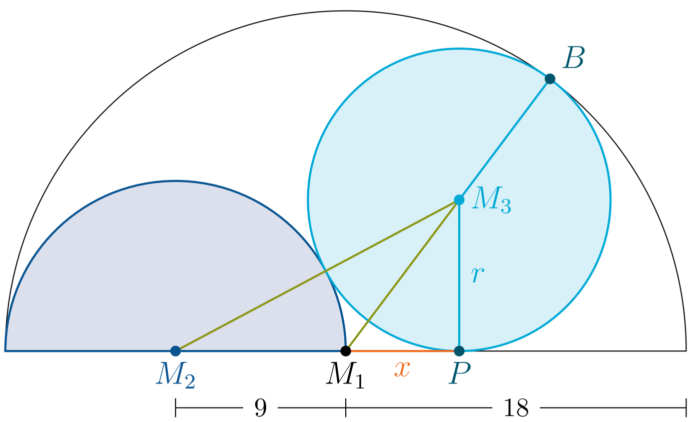
Aufgabe G 4 (9 Punkte)



In einem Halbkreis um M_1 mit dem Radius 18 liegen ein weiterer Halbkreis um M_2 und ein Vollkreis um M_3, der beide Halbkreise berührt.
B markiert den Berührpunkt der Kreisbögen um M_1 und M_3 (siehe Abbildung).

Berechnen Sie den Radius des Vollkreises.

Lösung



Sei $R = 18$ der Radius des Halbkreises um M_1 und r der Radius des Vollkreises um M_3. Es ist

$$|M_2M_3| = 9 + r.$$ 1

Da sich die Kreisbögen im Punkt B berühren, liegen die Punkte M_1, M_3 und B auf einem Radius des großen Halbkreises und es gilt:

$$|M_1B| = 18 \qquad \text{und} \qquad |M_1M_3| = 18 - r.$$ 1

Sei $x := |M_1P|$. Die beiden Dreiecke $\triangle M_1PM_3$ sowie $\triangle M_2PM_3$ sind rechtwinklig in P , daher gilt nach dem Satz des Pythagoras: 1

$$\begin{aligned} x^2 + r^2 &= (18-r)^2 \\ &= 324 - 36r + r^2 \\ \Leftrightarrow \qquad x^2 &= 324 - 36r \\ \Leftrightarrow \qquad 36r &= 324 - x^2, \end{aligned}$$ 1 0,5

sowie

$$\begin{aligned} (9+x)^2 + r^2 &= (9+r)^2 \\ \Leftrightarrow \qquad 81 + 18x + x^2 + r^2 &= 81 + 18r + r^2 \\ \Leftrightarrow \qquad x^2 + 18x &= 18r \\ \Leftrightarrow \qquad 2x^2 + 36x &= 36r. \end{aligned}$$ 1 0,5

Es folgt

$$\begin{aligned} 324 - x^2 &= 2x^2 + 36x \\ \Leftrightarrow \qquad 3x^2 + 36x - 324 &= 0 \\ \Leftrightarrow \qquad x^2 + 12x - 108 &= 0 \\ \Rightarrow \qquad x_{1,2} &= -6 \pm \sqrt{36 + 108} \\ &= -6 \pm \sqrt{144} \\ &= -6 \pm 12. \end{aligned}$$ 1

Damit ist $x_1 = -18$ und $x_2 = 6$, wobei $x_2 = 6$ die relevante Lösung ist. 1
Daraus folgt für den gesuchten Radius

$$r = \tfrac{324 - 6^2}{36} = \tfrac{288}{36} = 8.$$ 1