

Tag der Mathematik 2024

Einzelwettbewerb

Allgemeine Hinweise:

Als Hilfsmittel dürfen nur Schreibzeug, Geodreieck und Zirkel benutzt werden.
Elektronische Geräte sind nicht zugelassen.

Teamnummer	Name und Vorname

Die folgende Tabelle wird von den Korrektoren ausgefüllt.

Aufgabe	E 1	E 2	E 3	E 4	Summe
Mögliche Punktzahl	8	8	8	8	32
Erreichte Punktzahl					

Teamnummer	Name und Vorname

Aufgabe E 1 (8 Punkte)

Der Graph einer Funktion $y = f(x)$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung $(0|0)$, falls für alle x gilt

$$f(-x) = -f(x) .$$

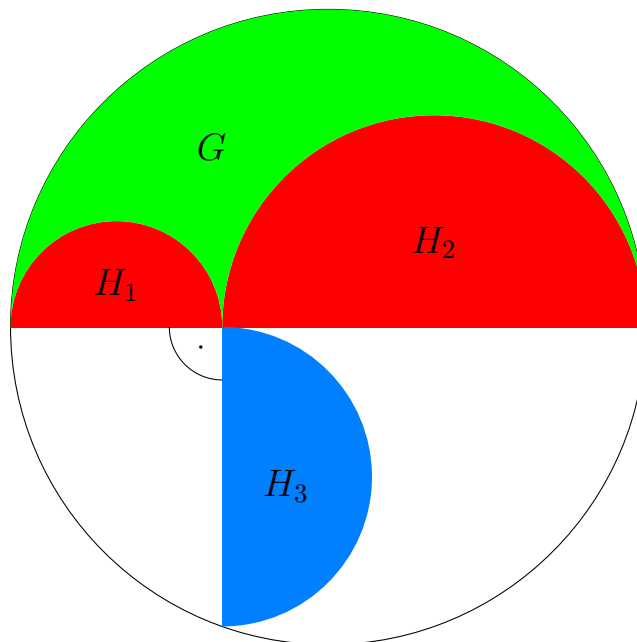
- Welche Funktionsgleichung erfüllt eine Funktion $y = f(x)$, deren Graph punktsymmetrisch zu einem (beliebigen) Punkt $(x_0|y_0)$ ist?
- Zeigen Sie, dass der Graph jeder kubischen Funktion

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

punktsymmetrisch zu ihrem Wendepunkt ist.

Teamnummer	Name und Vorname

Aufgabe E 2 (8 Punkte)



Die Halbkreise H_1 (Radius a) und H_2 (Radius b) liegen auf einem Durchmesser des Außenkreises (Radius $r = a + b$).

In welchem Verhältnis steht die Fläche des Halbkreises H_3 zur Fläche des Gebiets G ?

Teamnummer	Name und Vorname

Aufgabe E 3 (8 Punkte)

Für die natürliche Zahl n sei

$$H(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

und

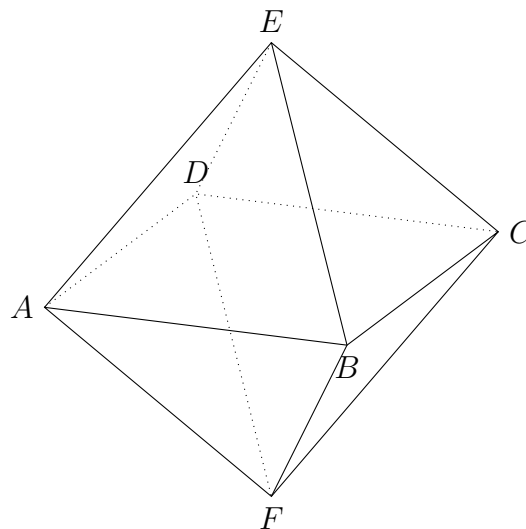
$$S(n) = \frac{H(1) + H(2) + \cdots + H(n-1)}{H(n) - 1}.$$

- Berechnen Sie $S(2)$ und $S(3)$.
- Leiten Sie eine Formel für $S(n)$ für beliebiges n her.

Teamnummer	Name und Vorname

Aufgabe E 4 (8 Punkte)

Oktaeder werden von acht gleichseitigen Dreiecken begrenzt. Sie haben sechs Ecken und zwölf Kanten.



Aufgrund der Symmetrie liegen die Ecken eines Oktaeders stets auf einer Kugel (Um-kugel) mit Radius R_u . Ebenso gibt es eine Kugel (Inkugel) mit Radius R_i , welche alle Flächen des Oktaeders von innen berührt, und schließlich liegen auch die Mittelpunkte aller Kanten auf einer Kugel mit Radius R_k .

Berechnen Sie R_u , R_k und R_i für ein Einheitsoktaeder mit Kantenlänge 1.