

Tag der Mathematik 2024

Einzelwettbewerb

Allgemeine Hinweise:

Als Hilfsmittel dürfen nur Schreibzeug, Geodreieck und Zirkel benutzt werden.
Elektronische Geräte sind nicht zugelassen.

Teamnummer	Name und Vorname

Die folgende Tabelle wird von den Korrektoren ausgefüllt.

Aufgabe	E 1	E 2	E 3	E 4	Summe
Mögliche Punktzahl	8	8	8	8	32
Erreichte Punktzahl					

Teamnummer	Name und Vorname

Aufgabe E 1 (8 Punkte)

Der Graph einer Funktion $y = f(x)$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung $(0|0)$, falls für alle x gilt

$$f(-x) = -f(x) .$$

- a) Welche Funktionsgleichung erfüllt eine Funktion $y = f(x)$, deren Graph punktsymmetrisch zu einem (beliebigen) Punkt $(x_0|y_0)$ ist?
- b) Zeigen Sie, dass der Graph jeder kubischen Funktion

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

punktsymmetrisch zu ihrem Wendepunkt ist.

Lösung

- a) Der Graph einer Funktion ist punktsymmetrisch zum Punkt $(x_0|y_0)$ falls für jedes x gilt

$$f(x_0 + x) - y_0 = y_0 - f(x_0 - x)$$

oder äquivalent

$$f(x_0 + x) + f(x_0 - x) = 2y_0.$$

- b) Der Wendepunkt $(x_w|y_w)$ erfüllt $0 = f''(x_w) = 6x_w + 2a$, liegt also bei

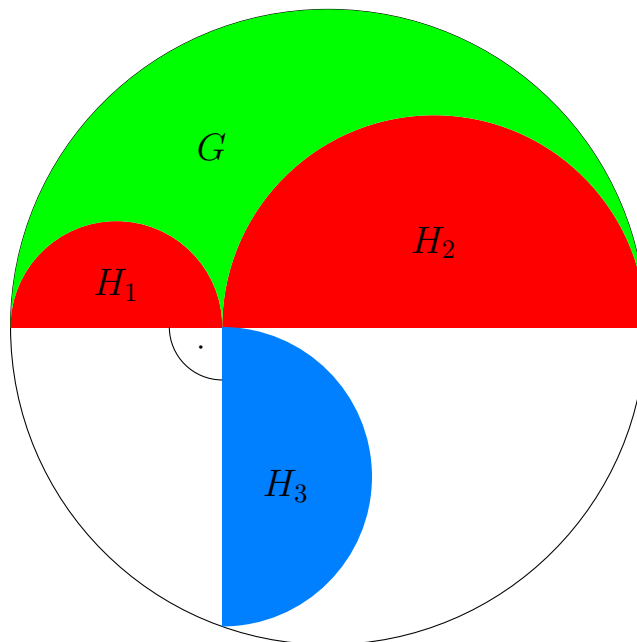
$$x_w = -\frac{a}{3}, \quad y_w = -\frac{a^3}{27} + a\frac{a^2}{9} - b\frac{a}{3} + c = \frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c.$$

Einsetzen in die Gleichung aus a) ergibt

$$\begin{aligned}
 f(x_w + x) + f(x_w - x) &= \left(-\frac{a}{3} + x\right)^3 + a\left(-\frac{a}{3} + x\right)^2 + b\left(-\frac{a}{3} + x\right) + c \\
 &\quad + \left(-\frac{a}{3} - x\right)^3 + a\left(-\frac{a}{3} - x\right)^2 + b\left(-\frac{a}{3} - x\right) + c \\
 &= -2\left(\frac{a}{3}\right)^3 - 2 \cdot 3\left(\frac{a}{3}\right)x^2 + 2a\frac{a^2}{9} + 2ax^2 - 2b\frac{a}{3} + 2c \\
 &= 2f\left(-\frac{a}{3}\right) = 2y_w.
 \end{aligned}$$

Teamnummer	Name und Vorname

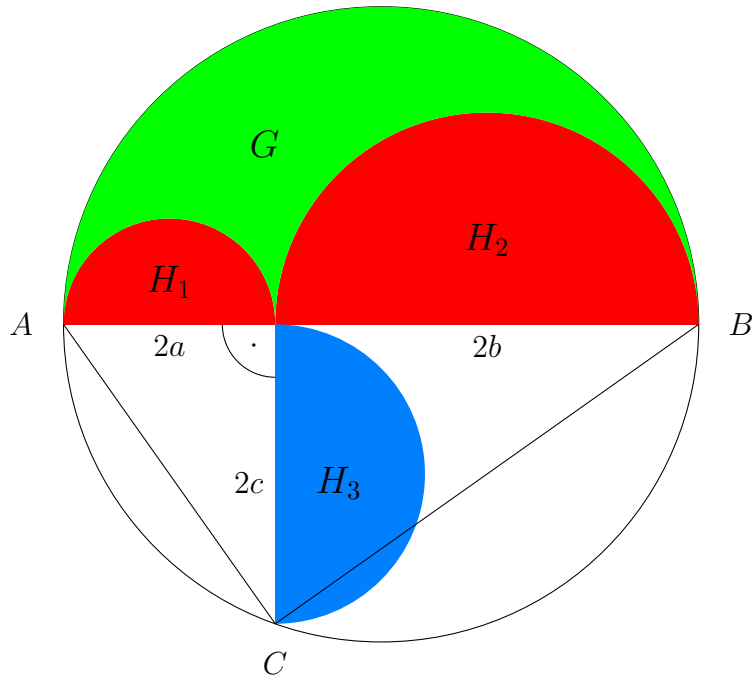
Aufgabe E 2 (8 Punkte)



Die Halbkreise H_1 (Radius a) und H_2 (Radius b) liegen auf einem Durchmesser des Außenkreises (Radius $r = a + b$).

In welchem Verhältnis steht die Fläche des Halbkreises H_3 zur Fläche des Gebiets G ?

Lösung



Nach dem Satz des Thales ist das Dreieck ABC rechtwinklig. Sind a , b und c die Radien von H_1 , H_2 und H_3 , so sind $2a$ und $2b$ die Hypotenusenabschnitte dieses Dreiecks und $2c$ ist seine Hypotenusenhöhe.

Nach dem Höhensatz des Euklid gilt daher

$$2a \cdot 2b = (2c)^2, \quad \text{also} \quad c^2 = ab$$

Die Fläche von H_3 beträgt $F_3 = \frac{1}{2}c^2\pi$.

Die Fläche des Gebietes G beträgt

$$F = \frac{1}{2}(a+b)^2\pi - \frac{1}{2}a^2\pi - \frac{1}{2}b^2\pi = ab\pi$$

Damit gilt

$$\frac{F_3}{F} = \frac{\frac{1}{2}c^2\pi}{ab\pi} = \frac{\frac{1}{2}c^2}{ab} = \frac{1}{2}.$$

Das Verhältnis der Flächen ist also unabhängig von der Wahl von a und b !

Teamnummer	Name und Vorname

Aufgabe E 3 (8 Punkte)

Für die natürliche Zahl n sei

$$H(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

und

$$S(n) = \frac{H(1) + H(2) + \cdots + H(n-1)}{H(n) - 1}.$$

- Berechnen Sie $S(2)$ und $S(3)$.
- Leiten Sie eine Formel für $S(n)$ für beliebiges n her.

Lösung

a)

$$S(2) = \frac{H(1)}{H(2) - 1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2} - 1} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$S(3) = \frac{H(1) + H(2)}{H(3) - 1} = \frac{1 + 1 + \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 1} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{5}{6}} = \frac{6}{2} = 3.$$

b) Wir untersuchen den Zähler $Z(n)$ von $S(n)$:

$$Z(n) = H(1) + H(2) + \cdots + H(n-1)$$

$$= \frac{1}{1} + \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1}\right)$$

Umsortieren und Zusammenfassen der Brüche mit gleichem Nenner liefert:

$$\begin{aligned}
 Z(n) &= (n-1)\frac{1}{1} + (n-2)\frac{1}{2} + (n-3)\frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} \\
 &= n-1 + \frac{n}{2} - 1 + \frac{n}{3} - 1 + \cdots + \frac{n}{n-1} - 1 \\
 &= n-1 + \frac{n}{2} - 1 + \frac{n}{3} - 1 + \cdots + \frac{n}{n-1} - 1 + \frac{n}{n} - 1 \\
 &= nH(n) - n = n(H(n) - 1).
 \end{aligned}$$

Also ist der Zähler von $S(n)$ gerade n mal so groß wie der Nenner, also

$$S(n) = n.$$

Alternativer Beweis durch Induktion:

Vermutung: $S(n) = n$

Beweis: Die Vermutung ist richtig für $n = 2, 3$ siehe a).

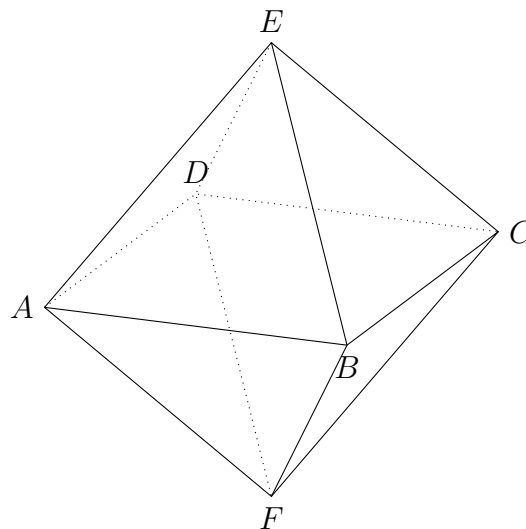
Annahme $S(n) = n$.

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow S(n+1) &= \frac{H(1) + H(2) + \cdots + H(n)}{H(n+1) - 1} \\
 &= \frac{H(1) + H(2) + \cdots + H(n-1) + H(n)}{H(n+1) - 1} \\
 &= \frac{S(n)(H(n) - 1) + H(n)}{H(n+1) - 1} \\
 &= \frac{n(H(n) - 1) + H(n)}{H(n) + \frac{1}{n+1} - 1} = \frac{n(H(n) - 1) + H(n)}{H(n) - \frac{n}{n+1}} \\
 &= (n+1) \frac{n(H(n) - 1) + H(n)}{(n+1)H(n) - n} = n+1.
 \end{aligned}$$

Teamnummer	Name und Vorname

Aufgabe E 4 (8 Punkte)

Oktaeder werden von acht gleichseitigen Dreiecken begrenzt. Sie haben sechs Ecken und zwölf Kanten.



Aufgrund der Symmetrie liegen die Ecken eines Oktaeders stets auf einer Kugel (Um-kugel) mit Radius R_u . Ebenso gibt es eine Kugel (Inkugel) mit Radius R_i , welche alle Flächen des Oktaeders von innen berührt, und schließlich liegen auch die Mittelpunkte aller Kanten auf einer Kugel mit Radius R_k .

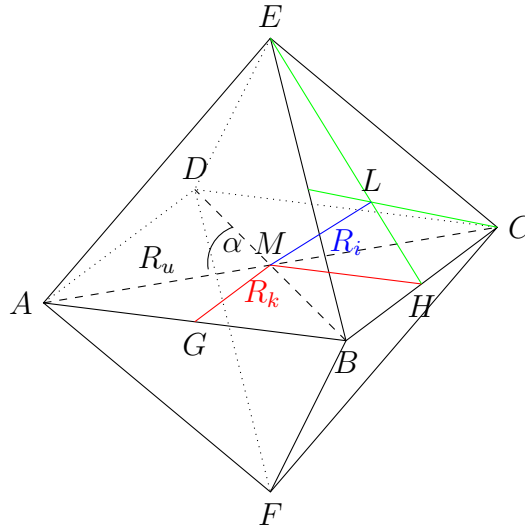
Berechnen Sie R_u , R_k und R_i für ein Einheitsoktaeder mit Kantenlänge 1.

Lösung

Alle Eckpunkte des Oktaeders haben vom Mittelpunkt M den Abstand R_u , alle Kantenmittelpunkte haben den Abstand R_k von M .

R_k und R_u kann man also im Quadrat $ABCD$ ablesen: R_k ist die halbe Kantenlänge des Quadrats (und damit des Oktaeders), R_u ist die halbe Länge der Diagonale. Wir haben also:

$$R_k = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad R_u = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$



Der Inkreisradius ist die Länge des Lotes l vom Oktaedermittelpunkt M auf eine der acht Dreiecksflächen, zum Beispiel die Länge der Strecke ML . Diese ist auch die Höhe im rechtwinkligen Dreieck MHE mit den Kathetenlängen R_k und R_u .

Bezeichnet man die Hypotenusenabschnitte dieses Dreiecks mit p und q , so liefert Pythagoras die Gleichungen

$$l^2 + p^2 = R_u^2 = \frac{1}{2}, \quad l^2 + q^2 = R_k^2 = \frac{1}{4} \quad \text{und} \quad (p + q)^2 = R_u^2 + R_k^2 = \frac{3}{4}$$

Mit den ersten beiden Gleichungen kann man p und q durch l ausdrücken. Setzt man das in die dritte Gleichung ein, erhält man

$$\frac{3}{4} = p^2 + q^2 + 2pq = \frac{1}{2} - l^2 + \frac{1}{4} - l^2 + 2\sqrt{\left(\frac{1}{2} - l^2\right)\left(\frac{1}{4} - l^2\right)}$$

und damit

$$l^2 = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - l^2\right)\left(\frac{1}{4} - l^2\right)}$$

Durch Quadrieren ergibt sich

$$l^4 = \frac{1}{8} - \frac{3}{4}l^2 + l^4, \quad \text{also} \quad l^2 = \frac{1}{6}$$

und schließlich

$$R_i = l = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Anmerkung: Die Rechnung wird kürzer, wenn man benutzt, dass $p = 2q$ ist. Dann wird aus der dritten Gleichung $9q^2 = \frac{3}{4}$ und damit aus der zweiten $l^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$.

Die Gleichung $p = 2q$ kommt daher, dass L der Schnittpunkt der Höhen und damit auch der Seitenhalbierenden im gleichseitigen Dreieck BCE ist und dass sich die Seitenhalbierenden im Dreieck im Verhältnis 2:1 teilen.