Tag der Mathematik 2023

Einzelwettbewerb

Allgemeine Hinweise:

Als Hilfsmittel dürfen nur Schreibzeug, Geodreieck und Zirkel benutzt werden. Elektronische Geräte sind nicht zugelassen.

Teamnummer	Name und Vorname

Die folgende Tabelle wird von den Korrektoren ausgefüllt.

Aufgabe	E 1	E 2	E 3	E 4	Summe
Mögliche Punktzahl	8	8	8	8	32
Erreichte Punktzahl					

Teamnummer	Name und Vorname

Aufgabe E 1 (8 Punkte)

Für eine vierstellige Zahl $abcd$ mit den Ziffern a, b, c und d betrachten wir:

- die Quersumme: $a+b+c+d$
- die alternierende Quersumme: $-a+b-c+d$
- und die gewichtete Quersumme: $4a+3b+2c+d$

Für die Zahl 2023 ist die Quersumme 7, die alternierende Quersumme -1 und die gewichtete Quersumme 15.

Finden Sie eine weitere vierstellige Zahl $abcd$, bei der die Quersumme, die alternierende Quersumme und die gewichtete Quersumme jeweils den selben Wert ergibt wie bei 2023. Wie viele solche Zahlen gibt es?

Hinweis: Bei einer vierstelligen Zahl $abcd$ darf die erste Ziffer a nicht 0 sein.

Lösung:
Die vier Ziffern a, b, c und d müssen das folgende Gleichungssystem erfüllen:

$$a+b+c+d=7 \tag{1}$$
$$-a+b-c+d=-1 \tag{2}$$
$$4a+3b+2c+d=15 \tag{3}$$

Daraus erhalten wir:

$$\begin{aligned} (1)+(2): &\quad 2b+2d=6 \Rightarrow b+d=3 \Rightarrow d=3-b \\ (1)-(2): &\quad 2a+2c=8 \Rightarrow a+c=4 \Rightarrow c=4-a \end{aligned}$$

Einsetzen in (3) ergibt:

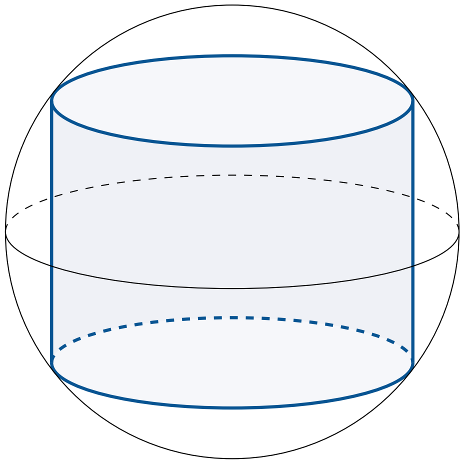
$$\begin{aligned} & 4a+3b+8-2a+3-b=15 \\ \Rightarrow\quad & 2a+2b+11=15 \\ \Rightarrow\quad & a+b=2 \\ \Rightarrow\quad & b=2-a \end{aligned}$$

Nach Aufgabenstellung sind a, b, c und d Ziffern und es muss $a > 0$ gelten.
Aus $b = 2 - a$ folgt $a = 1$ oder $a = 2$, sonst wird b negativ.
Wir erhalten für $a = 2$ die bekannte Lösung 2023.
Für $a = 1$ erhalten wir die weitere Lösung 1132.
Nach der obigen Argumentation sind das die beiden einzigen Zahlen, die die Bedingungen erfüllen.

Teamnummer	Name und Vorname

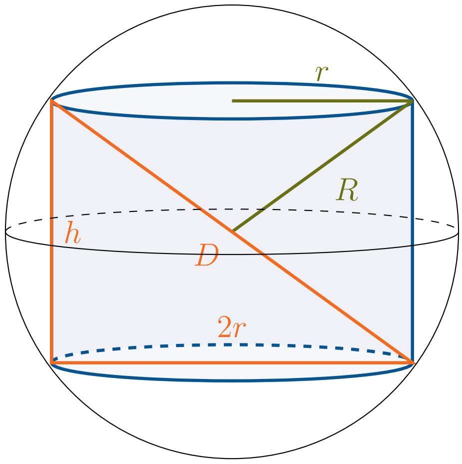
Aufgabe E 2 (8 Punkte)

In einer kugelförmigen Tiefseetauchsonde mit Durchmesser 1 Meter soll ein möglichst großer zylinderförmiger Tank eingebaut werden.



Wie groß muss die Höhe des Zylinders gewählt werden, damit er ein maximales Volumen besitzt? Geben Sie für diesen Fall das Volumen konkret an.

Lösung:
Der Durchmesser der Kugel sei $D = 2R = 1$ (in Metern), wobei R der Radius der Kugel ist. Der Radius des Zylinders sei r, seine Höhe h; dann ist das Volumen des Zylinders $V = r^2\pi h$.



Dabei gilt:

$$\begin{aligned} & D^2 = 4R^2 = 1 = h^2 + (2r)^2 \\ \Rightarrow \quad & r^2 = \frac{1-h^2}{4} \\ & V = r^2\pi h = \frac{1-h^2}{4}\pi h = (h-h^3)\frac{\pi}{4} = V(h) \\ \Rightarrow \quad & V'(h) = (1-3h^2)\frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Das Maximum wird erreicht für $V'(h) = 0$ und $V''(h) = -\frac{3}{2}h\pi < 0$, also für

$$h = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

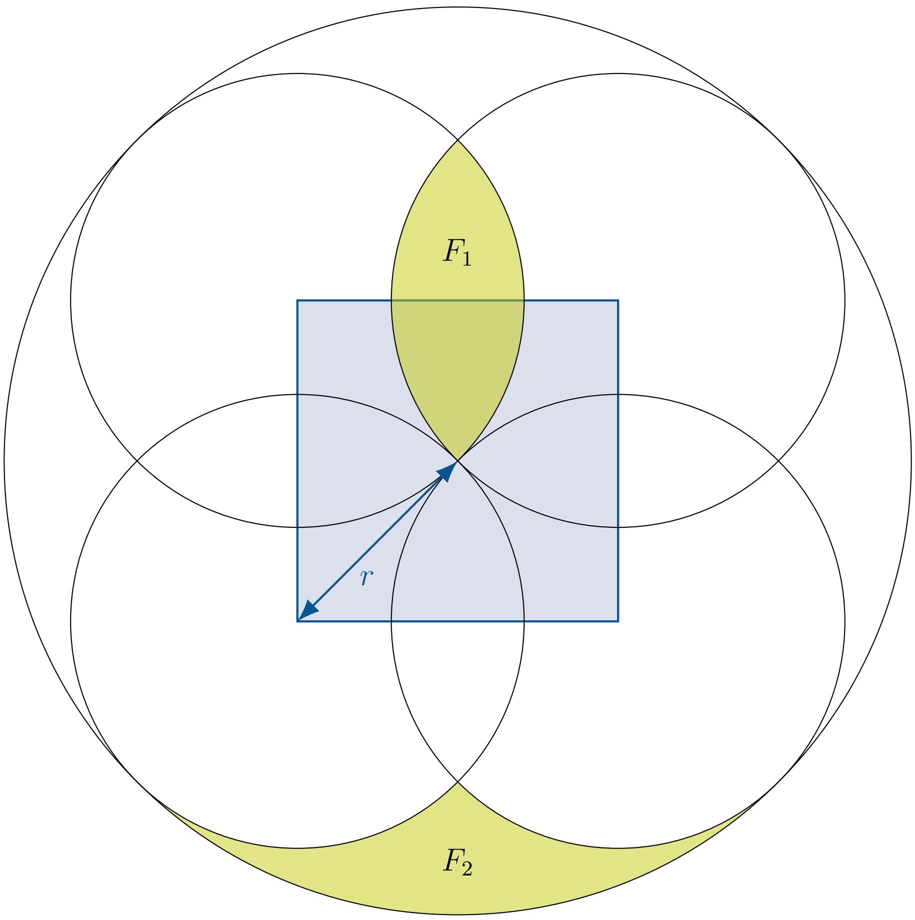
Das Volumen ist dann

$$V = r^2\pi h = (1-h^2)\frac{h}{4}\pi = \frac{1}{6\sqrt{3}}\pi.$$

Teamnummer	Name und Vorname

Aufgabe E 3 (8 Punkte)

Gegeben sei ein Quadrat, dessen Diagonale Länge $2r$ hat. Um jeden der 4 Eckpunkte des Quadrats wird ein Kreis mit Radius r gezogen, außerdem um den Mittelpunkt des Quadrats ein Kreis mit Radius $2r$. Es entsteht die abgebildete Figur.



a) Zeigen Sie, dass die Flächenstücke F_1 und F_2 gleich groß sind.

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt von F_1 in Abhängigkeit von r.

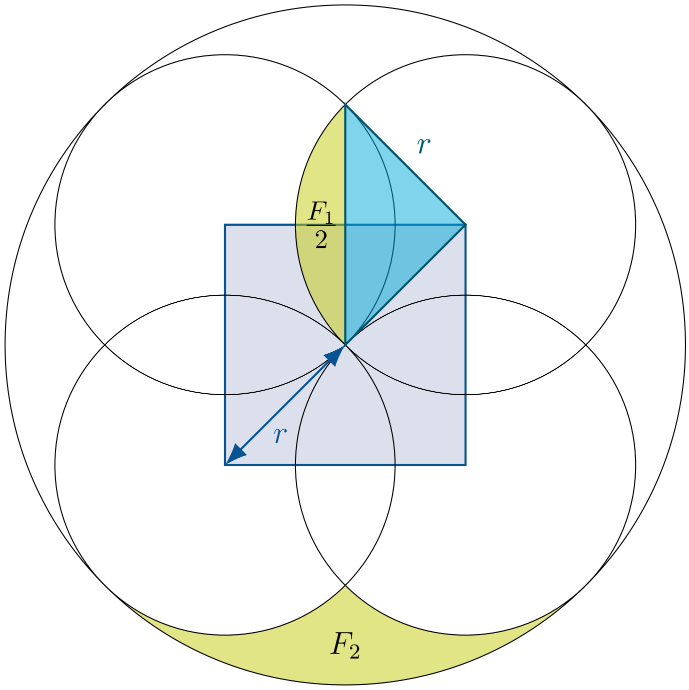
Lösung:

a) Der Flächeninhalt der Vereinigung der vier kleinen Kreise ist

$$\begin{aligned}&4\cdot(\text{Fläche eines kleinen Kreises}) - 4\cdot F_1\\ =\;&\text{Fläche des großen Kreises} - 4\cdot F_2.\end{aligned}$$

Da die Fläche des großen Kreises viermal so groß ist wie die eines kleinen Kreises (nämlich $(2r)^2\pi = 4\cdot r^2\pi$), sind F_1 und F_2 gleich groß.

b) Eine Hälfte von F_1 entsteht aus einem Viertel des kleinen Kreises, indem ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck mit Kathetenlänge r entfernt wird.



Also gilt

$$F_1 = 2\cdot\left(\frac{r^2\pi}{4} - \frac{r^2}{2}\right) = r^2\left(\tfrac{\pi}{2} - 1\right).$$

Teamnummer	Name und Vorname

Aufgabe E 4 (8 Punkte)

a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Zahlen 1, 2, 3 so anzuordnen, dass keine Zahl an ihrem Platz steht (also 1 nicht an erster Stelle, 2 nicht an zweiter, 3 nicht an dritter)?

b) Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 so anzuordnen, dass keine Zahl an ihrem Platz steht?

Lösung:

a) Insgesamt gibt es $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ Anordnungen (Permutationen) der drei Zahlen:

123	213	312
132	231	321

Offensichtlich steht nur bei den beiden Anordnungen 231 und 312 keine Zahl an ihrem Platz. Die Antwort ist also 2.

b) Insgesamt gibt es $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ Anordnungen (Permutationen) von fünf Zahlen. Bleibt bei einer Permutation eine Zahl an ihrem Platz, nennen wir diese Zahl einen Fixpunkt der Permutation. Wir zählen die Permutationen mit Fixpunkt und ziehen diese Anzahl von 120 ab.

Für jede der fünf Zahlen $1, ..., 5$ gibt es $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ Anordnungen, die diese Zahl als Fixpunkt haben. Das sind zusammen $s_1 = 5 \cdot 24 = 120$ Permutationen.

Dabei sind Permutationen mit zwei Fixpunkten doppelt gezählt; davon gibt es für jedes Paar sechs Stück, zusammen also $s_2 = 10 \cdot 6 = 60$.

Anordnungen mit 3 Fixpunkten sind in s_1 und in s_2 jeweils dreimal gezählt: In s_1 für jede der 3 Ziffern und in s_2 für jedes der 3 Ziffernpaare. In $s_1 - s_2$ wären sie also gar nicht berücksichtigt, wir müssen also diese $s_3 = 10 \cdot 2 = 20$ Permutationen wieder hinzufügen.

Anordnungen mit vier oder fünf Fixpunkten gibt es nur eine, nämlich 12345. Diese ist in s_1 fünfmal und in s_2 und s_3 je zehnmal gezählt worden, in $s_1 - s_2 + s_3$ damit fünfmal, also $s_4 = 4$ mal zu oft. Wir haben also $s_1 - s_2 + s_3 - s_4 = 76$ Anordnungen mit Fixpunkt.

Die gesuchte Anzahl ist damit $120 - 76 = 44$.

Alternativer Lösungsweg:

Fall 1: Ziffer 1 tauscht den Platz mit einer anderen Ziffer (4 Möglichkeiten). Dann müssen die anderen drei Ziffern ihre Positionen untereinander so tauschen, dass keine auf ihrem Platz bleibt. Dafür gibt es 2 Möglichkeiten, s. Teil a).
Insgesamt gibt es also $4 \cdot 2 = 8$ Möglichkeiten mit 1 im Zifferntausch.

Fall 2: Ziffer 1 wandert an den Platz einer anderen Ziffer (4 Möglichkeiten) und diese wandert an die Stelle einer dritten Ziffer (3 Möglichkeiten) und diese dritte Ziffer wandert an Position 1 (Dreierzyklus). Dann müssen die verbliebenen 2 Ziffern die Positionen tauschen. Das geht nur auf eine Weise.
Also gibt es insgesamt $4 \cdot 3 \cdot 1 = 12$ Möglichkeiten mit 1 im Dreierzyklus.

Fall 3: Ziffer 1 wandert an den Platz einer anderen Ziffer (4 Möglichkeiten), diese wandert an die Stelle einer dritten Ziffer (3 Möglichkeiten) und diese dritte Ziffer wandert an die Position einer vierten Ziffer (2 Möglichkeiten). Die vierte Ziffer darf dann nicht an Position 1 gesetzt werden, weil sonst die fünfte Ziffer ein Fixpunkt wäre. Die vierte Ziffer muss daher ohne Wahlmöglichkeit an die Stelle der fünften Ziffer und diese dann an Position 1 (Fünferzyklus).
Also gibt es insgesamt $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ Möglichkeiten mit 1 im Fünferzyklus.

Alle drei Fälle zusammen ergeben dann $8 + 12 + 24 = 44$ Möglichkeiten.