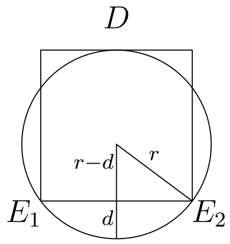
Teamnummer	Name und Vorname

Aufgabe E 1 (8 Punkte)

Gegeben sei ein Quadrat Q sowie der Kreis durch zwei benachbarte Ecken E_1, E_2 von Q und den Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite von Q.
Der Abschnitt der Mittelsenkrechten der Strecke $\overline{E_1E_2}$, der außerhalb von Q, aber innerhalb des Kreises liegt, habe die Länge d.

Bestimmen Sie die Kantenlänge von Q.

Lösung: Wir machen eine Skizze



Die Kantenlänge des Quadrates ist $2r-d$, und aus dem rechtwinkligen Dreieck ergibt sich nach Pythagoras

$$r^2 = (r-d)^2 + \left(\frac{2r-d}{2}\right)^2.$$

Auflösen der rechten Seite ergibt

$$r^2 - 2rd + d^2 + r^2 - rd + \frac{d^2}{4} = r^2,$$

also

$$r^2 - 3rd + \frac{5}{4}d^2 = 0.$$

Mit der Lösungformel für quadratische Gleichungen folgt

$$r = \frac{d}{2} \quad \text{oder} \quad r = \frac{5d}{2}.$$

Da r offensichtlich mindestens so groß ist wie d, bleibt nur die Möglichkeit $r = \frac{5}{2}d$.
Die Kantenlänge ist demnach $2r - d = 4d$.

Aufgabe E 2 (8 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

mit $n \geq 1$ und ganzen Zahlen $a_0, \ldots, a_{n-1}$.

a) Zeigen Sie, dass $f(\frac{1}{2}) \neq 0$ gilt.

b) Ist das auch für $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ richtig?

Lösung:

a) Angenommen, $\frac{1}{2}$ wäre eine Nullstelle, so hieße das

$$\frac{1}{2^n} + a_{n-1}\frac{1}{2^{n-1}} + \ldots + a_1 \cdot \frac{1}{2} + a_0 = 0.$$

Hier bringen wir den ersten Summanden auf die rechte Seite und multiplizieren dann beide Seiten mit -2^n :

$$-(2a_{n-1} + 4a_{n-2} + \ldots + 2^{n-1}a_1 + 2^n a_0) = 1.$$

Da alle Summanden links gerade Zahlen sind, müsste dann auch 1 eine gerade Zahl sein, was nicht stimmt.

Also ist $f(\frac{1}{2}) \neq 0$.

b) Nein, das ist für $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ nicht zwangsläufig richtig.

Wir setzen $\omega = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$.

Dann ist

$$\omega^2 = \frac{1}{4}(1 + 2\sqrt{5} + 5) = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5}) = \omega + 1$$

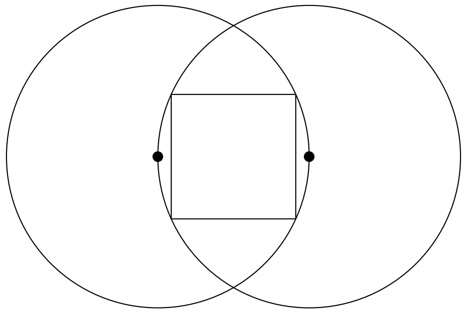
und folglich ω eine Nullstelle der Funktion

$$f(x) = x^2 - x - 1,$$

die Grad $2 \geq 1$ und ganzzahlige Koeffizienten hat sowie Faktor 1 vor der höchsten Potenz. Es gibt also mindestens ein Polynom, das die Voraussetzungen an f aus der Aufgabe erfüllt und ω als Nullstelle hat.

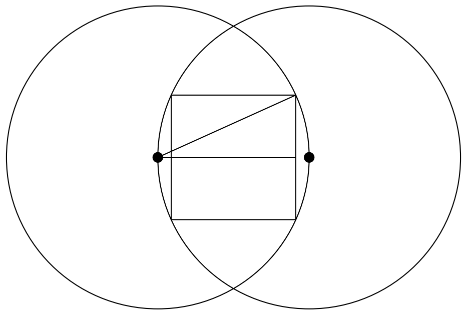
Aufgabe E 3 (8 Punkte)

Gegeben seien zwei Kreise vom Radius 1, deren Mittelpunkte ebenfalls Abstand 1 haben.



Bestimmen Sie die Fläche des in den Durchschnitt der beiden Kreise einbeschriebenen Quadrates.

Lösung:



Wenn a die Kantenlänge des Quadrates ist, dann hat das rechtwinklige Dreieck Kathetenlängen $\frac{a}{2}$ und $\frac{1+a}{2}$ und Hypotenusenlänge 1, und es gilt

$$\frac{1}{4}(1+a)^2 + \frac{1}{4}a^2 = 1.$$

Das liefert

$$2a^2 + 2a - 3 = 0,$$

und somit

$$a = \frac{-2 \pm \sqrt{4+24}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{7}}{2}.$$

Hier kommt nur die positive Lösung in Frage:

$$a = \frac{\sqrt{7}-1}{2}.$$

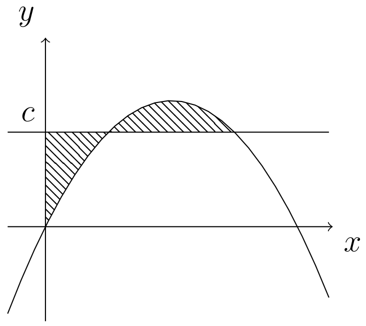
Der Flächeninhalt ist damit

$$a^2 = 2 - \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

Aufgabe E 4 (8 Punkte)

Sei $c \in \mathbb{R}$ so, dass die Gerade $y = c$ die Parabel $y = 2x - 3x^2$ im ersten Quadranten schneidet.

Für welches c sind die beiden schraffierten Flächen gleich groß?



Lösung:
Die beiden Werte $x_{1/2}$, bei denen der Funktionswert von $2x - 3x^2$ gleich c ist, sind nach der Lösungsformel für quadratische Gleichungen

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{1-3c}}{3} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{1 + \sqrt{1-3c}}{3}.$$

Der Flächeninhalt des schraffierten Teiles oberhalb der Parabel ist daher

$$c \cdot x_1 - \int_0^{x_1} (2x - 3x^2)\mathrm{d}x = c \cdot x_1 - (x^2 - x^3)|_0^{x_1} = c \cdot x_1 - x_1^2 + x_1^3.$$

Der Flächeninhalt des schraffierten Teiles unter der Parabel ist

$$\int_{x_1}^{x_2} (2x - 3x^2)\mathrm{d}x - c \cdot (x_2 - x_1) = x_2^2 - x_2^3 - x_1^2 + x_1^3 + c(x_1 - x_2).$$

Damit diese beiden Flächeninhalte gleich werden, muss

$$x_2^2 - x_2^3 - cx_2 = 0$$

gelten, da die Terme mit x_1 sich beim Gleichsetzen wegheben. Hier dürfen wir x_2 kürzen, da dies sicher ungleich 0 ist. Wegen $c = 2x_2 - 3x_2^2$ folgt

$$x_2 - x_2^2 = c = 2x_2 - 3x_2^2,$$

also nach Subtraktion der beiden Terme links und rechts

$$0 = c - c = x_2 - 2x_2^2.$$

Erneutes Kürzen von x_2 liefert $x_2 = \frac{1}{2}$ und $c = \frac{1}{4}$.

Alternative Lösung: Eleganter ist es, auszunutzen, dass

$$c \cdot x_2 = \int_0^{x_2} 2x - 3x^2 \mathrm{d}x$$

gelten muss. Dies erspart etwas Rechnung und ist letztlich auch der Grund, weshalb x_1 in der ersten Lösung am Ende gar keine Rolle spielt.