

Tag der Mathematik 2026

Einzelwettbewerb

Allgemeine Hinweise:

Die Bearbeitungszeit beträgt 60 Minuten.

Als Hilfsmittel dürfen nur Schreibzeug, Geodreieck und Zirkel benutzt werden.
Elektronische Geräte sind nicht zugelassen.

Teamnummer	Name und Vorname

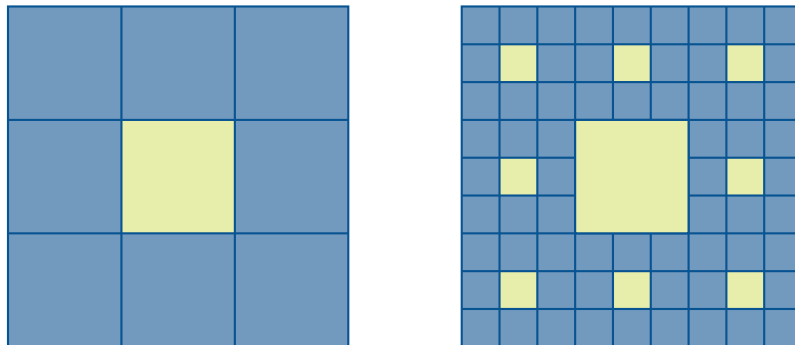
Die folgende Tabelle wird von den Korrektoren ausgefüllt.

Aufgabe	E 1	E 2	E 3	E 4	Summe
Mögliche Punktzahl	8	8	8	8	32
Erreichte Punktzahl					

Teamnummer	Name und Vorname

Aufgabe E 1 (8 Punkte)

Ein quadratischer Teppich mit 9 m Seitenlänge wird im ersten Schritt in neun gleiche Quadrate aufgeteilt. Das mittlere Quadrat wird anschließend herausgeschnitten. Im zweiten Schritt wird mit den verbleibenden Quadraten ebenso verfahren.



- Berechnen Sie den Flächeninhalt des löchrigen Teppichs nach den ersten beiden Schritten.
- Berechnen Sie seinen Flächeninhalt nach dem dritten Schritt, wenn man das Verfahren fortsetzt.
(Hinweis: Das Ergebnis kann als Produkt, Summe oder Potenz angegeben werden.)
- Geben Sie einen Term an, mit dem sich der Flächeninhalt des löchrigen Teppichs nach n Schritten berechnen lässt.

Lösung

a) Zu Beginn hat der Teppich eine Fläche von

$$A_0 = (9 \text{ m})^2 = 81 \text{ m}^2.$$

Nach Schritt 1 beträgt der Flächeninhalt

$$A_1 = (9 - 1) \cdot \left(\frac{9 \text{ m}}{3}\right)^2 = 8 \cdot (3 \text{ m})^2 = 8 \cdot 9 \text{ m}^2 = 72 \text{ m}^2.$$

1

Es werden nun die acht verbleibenden Quadrate weiter verarbeitet.

Die Seitenlänge von jedem dieser acht Quadrate beträgt $\frac{9 \text{ m}}{3} = 3 \text{ m}$.

Die Fläche jedes neu zu entfernenden Quadrates beträgt also $\left(\frac{3 \text{ m}}{3}\right)^2 = 1 \text{ m}^2$,
und es werden im zweiten Schritt acht solcher Quadrate entfernt.

Insgesamt beträgt die im zweiten Schritt entfernte Fläche also $8 \cdot 1 \text{ m}^2 = 8 \text{ m}^2$.

Damit beträgt die verbleibende Gesamtfläche nach dem zweiten Schritt

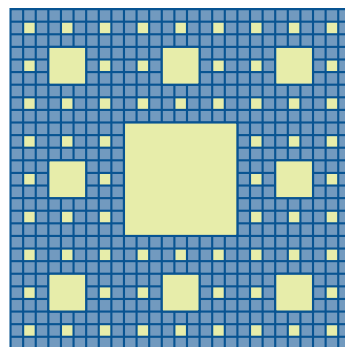
$$A_2 = A_1 - 8 \text{ m}^2 = 64 \text{ m}^2.$$

1

b) Wir argumentieren analog zu Schritt 2. Nach dem zweiten Schritt besteht der Teppich aus 64 Quadraten, von denen jedes Seitenlänge 1m hat. Die Fläche jedes neu zu entfernenden Quadrates beträgt also

$$\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \text{ m}\right)^2 = \frac{1}{9} \text{ m}^2,$$

und es werden im dritten Schritt 64 solcher Quadrate entfernt.



Insgesamt beträgt die im dritten Schritt entfernte Fläche also

$$64 \cdot \frac{1}{9} \text{ m}^2 = \frac{64}{9} \text{ m}^2.$$

Damit beträgt die verbleibende Gesamtfläche nach dem dritten Schritt

$$\begin{aligned} A_3 &= A_2 - \frac{64}{9} \text{ m}^2 \\ &= 64 \text{ m}^2 - \frac{64}{9} \text{ m}^2 \\ &= 56\frac{8}{9} \text{ m}^2. \end{aligned}$$

2
1

- c) Wir argumentieren analog zu Schritt 2 und 3. Nach dem $(n - 1)$ -ten Schritt existieren 8^{n-1} Quadrate. Die Seitenlänge von jedem dieser 8^{n-1} Quadrate beträgt $\left(\frac{1}{3}\right)^{n-3}$ m. Die Fläche jedes neu zu entfernenden Quadrates beträgt also

$$\left(\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-3} \text{ m}\right)^2 = \left(\frac{1}{9}\right)^{n-2} \text{ m}^2,$$

und es werden im n -ten Schritt 8^{n-1} solcher Quadrate entfernt. Insgesamt beträgt die im n -ten Schritt entfernte Fläche also

$$8^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{n-2} \text{ m}^2 = 9 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^{n-1} \text{ m}^2.$$

Damit beträgt die verbleibende Gesamtfläche nach dem n -ten Schritt

$$\begin{aligned} A_n &= A_{n-1} - 9 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^{n-1} \text{ m}^2 \\ &= A_{n-2} - 9 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^{n-1} \text{ m}^2 - 9 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^{n-2} \text{ m}^2 \\ &= A_0 - 9 \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{8}{9}\right)^i \text{ m}^2 && \text{(geometrische Reihe)} \\ &= \left(81 - 9 \cdot \frac{1 - \left(\frac{8}{9}\right)^n}{1 - \frac{8}{9}}\right) \text{ m}^2 \\ &= \left(81 - 81 \cdot \left(1 - \left(\frac{8}{9}\right)^n\right)\right) \text{ m}^2 \\ &= 81 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^n \text{ m}^2 \end{aligned}$$

1

2

Alternative Lösung:

In jedem Schritt wird jedes Teilquadrat der verbleibenden Gesamtfläche in $3 \times 3 = 9$ gleichgroße Flächen (Quadrate) aufgeteilt, davon bleiben nach dem Herausschneiden 8 Quadrate. Es gilt also:

a)

$$\begin{aligned} A_0 &= (9 \text{ m})^2 = 81 \text{ m}^2 \\ A_1 &= \frac{8}{9} \cdot A_0 = 72 \text{ m}^2 \\ A_2 &= \frac{8}{9} \cdot A_1 = 64 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

1
1

b)

$$A_3 = \frac{8}{9} \cdot A_2 = 56\frac{8}{9} \text{ m}^2$$

2 1

c)

$$\begin{aligned}A_n &= \frac{8}{9} \cdot A_{n-1} \\ &= \left(\frac{8}{9}\right)^2 \cdot A_{n-2} \\ &= \left(\frac{8}{9}\right)^3 \cdot A_{n-3} \\ &= \left(\frac{8}{9}\right)^n \cdot A_0 \\ &= \left(\frac{8}{9}\right)^n \cdot 81 \text{ m}^2\end{aligned}$$

1

2

Teamnummer	Name und Vorname

Aufgabe E 2 (8 Punkte)

Für die ganzen Zahlen a, b, c gelte $0 < a < b < c$. Zeigen Sie:

- $(c - a)(c - b)(b - a)$ ist gerade.
- $P = a \cdot b \cdot c \cdot (c - a)(c - b)(b - a)$ ist durch 12 teilbar.

Lösung

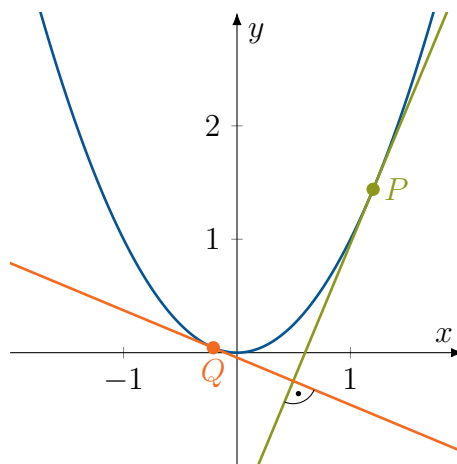
- Zu zeigen ist, dass mindestens einer der drei Faktoren gerade ist. 1
Nennen wir „Parität“ die Eigenschaft einer Zahl, gerade oder ungerade zu sein, so müssen zwei der drei Zahlen a, b, c die gleiche Parität haben. Sind das zum Beispiel a und b , so ist $b - a$ gerade. 1
- Zu zeigen ist, dass P sowohl durch 4 als auch durch 3 teilbar ist. 1
 - P ist durch 4 teilbar: 1
Ist eine der drei Zahlen a, b, c gerade, so ist P wegen a) durch 4 teilbar. 1
Sind a, b und c alle ungerade, so sind alle drei Differenzen gerade, und P ist sogar durch 8 teilbar, insbesondere also auch durch 4. 1
 - P ist durch 3 teilbar: 1
Ist eine der Zahlen a, b, c durch 3 teilbar, so gilt das auch für P . 1
Andernfalls lassen alle drei Zahlen bei Division durch 3 den Rest 1 oder 2. Mindestens zwei der Zahlen lassen also den gleichen Rest bei Division durch 3, und deren Differenz ist dann durch 3 teilbar. 2

Teamnummer	Name und Vorname

Aufgabe E 3 (8 Punkte)

Sei P ein Punkt auf der Normalparabel $f(x) = x^2$.

Ist P nicht der Ursprung, so gibt es einen Punkt Q auf der Parabel, sodass die Tangente an Q die Tangente an P orthogonal schneidet.



- Bestimmen Sie die Koordinaten von Q .
- Bestimmen Sie die Koordinaten des Mittelpunkts der Strecke \overline{PQ} .
- Auf welcher Ortskurve liegen diese Mittelpunkte, wenn P alle vom Ursprung verschiedenen Punkte der Parabel durchläuft?

Lösung

a) P habe die Koordinaten $(p | p^2)$ mit $p \neq 0$. Die Tangente in P hat die Steigung

$$m_P = f'(p) = 2p.$$

1

Hat Q die Koordinaten $(q | q^2)$, so hat die Tangente in Q die Steigung

$$m_Q = 2q.$$

Die Tangenten in P und Q schneiden sich orthogonal, wenn

$$\begin{aligned} m_P \cdot m_Q &= -1 \\ \Leftrightarrow 2p \cdot 2q &= -1. \end{aligned}$$

1

Also ist $q = -\frac{1}{4p}$ und Q hat also die Koordinaten $\left(-\frac{1}{4p} \mid \frac{1}{16p^2}\right)$.

1

b) Der Mittelpunkt M der Strecke \overline{PQ} hat die Koordinaten

$$\begin{aligned} x_M &= \frac{p+q}{2} \\ y_M &= \frac{p^2+q^2}{2}. \end{aligned}$$

1

Einsetzen von $q = -\frac{1}{4p}$ aus a) ergibt

$$\begin{aligned} x_M &= \frac{1}{2}\left(p - \frac{1}{4p}\right) = \frac{1}{8p}(4p^2 - 1) \\ y_M &= \frac{1}{2}\left(p^2 + \frac{1}{16p^2}\right) = \frac{1}{32p^2}(16p^4 + 1). \end{aligned}$$

1

c) Gesucht ist eine Gleichung zwischen x_M und y_M .

Da in y_M nur p^4 und in x_M nur p^2 vorkommt, liegt es nahe, x_M^2 zu berechnen:

$$x_M^2 = \frac{1}{64p^2}(16p^4 - 8p^2 + 1).$$

1

Der Vergleich mit y_M zeigt:

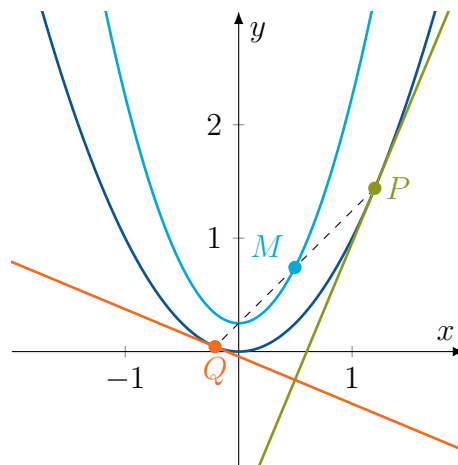
$$x_M^2 = \frac{1}{2}y_M - \frac{8}{64} = \frac{1}{2}y_M - \frac{1}{8}.$$

1

Folglich liegen die Mittelpunkte auf der Parabel

$$f_M(x) = 2x^2 + \frac{1}{4}.$$

1



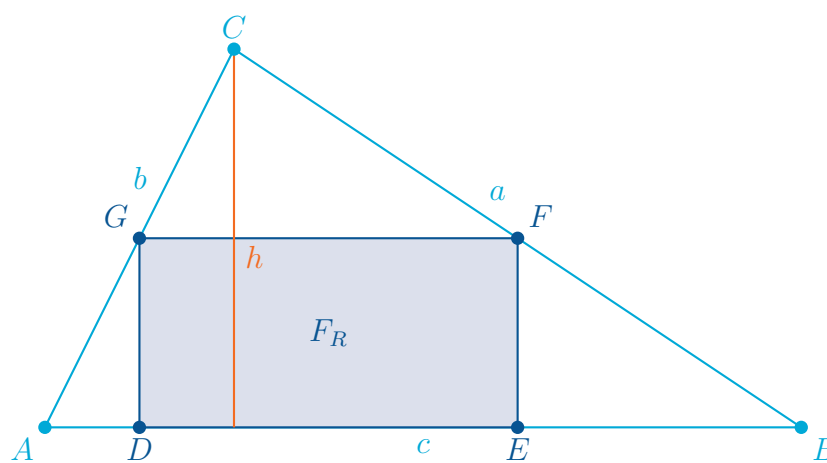
Bemerkung:

Das Ergebnis zeigt, dass die Mittelpunkte auf dem Graph einer geraden Funktion liegen, also symmetrisch zur y -Achse sind.

Das sieht man auch unmittelbar geometrisch: Ist P' der Spiegelpunkt von P bezüglich der y -Achse, so ist der zugehörige Punkt Q' der Spiegelpunkt von Q . Also geht die Strecke $\overline{P'Q'}$ aus \overline{PQ} durch Spiegelung an der y -Achse hervor. Das gilt dann natürlich auch für die Mittelpunkte.

Teamnummer	Name und Vorname

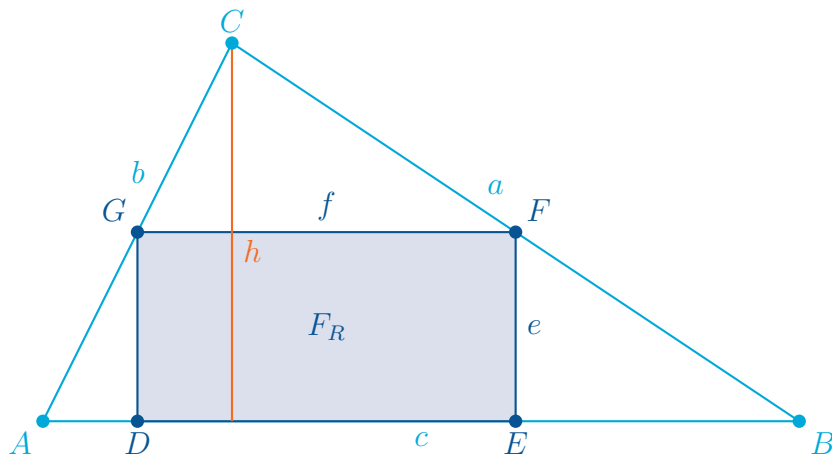
Aufgabe E 4 (8 Punkte)



In das Dreieck $\triangle ABC$ wird ein Rechteck $DEFG$ eingeschrieben, sodass zwei Eckpunkte auf der Seite \overline{AB} liegen und das Rechteck maximale Fläche F_R hat.

Wie groß ist diese Fläche, wenn die Fläche des Dreiecks 1 m^2 ist? (Mit Begründung)

Lösung



Wir fassen den Flächeninhalt des Rechtecks als Funktion auf, die von den Seitenlängen e und f abhängt:

$$F_R(e, f) = e \cdot f \quad (\text{Zielfunktion})$$

Die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle GFC$ sind ähnlich. Daher gilt

$$\begin{aligned} \frac{c}{h} &= \frac{f}{h-e} \\ \Rightarrow f &= \frac{c(h-e)}{h}. \end{aligned} \quad (\text{Nebenbedingung})$$

Damit lässt sich die Funktion F_R darstellen als:

$$F_R(e) := e \cdot f = e \cdot \frac{c(h-e)}{h} = c \cdot \left(e - \frac{e^2}{h} \right).$$

Das Maximum dieser Funktion können wir über die Ableitung

$$F'_R(e) = c \cdot \left(1 - \frac{2e}{h} \right)$$

bestimmen. Es gilt:

$$\begin{aligned} F'_R(e) &= 0 \\ \Rightarrow e &= \frac{h}{2} \end{aligned}$$

Für die zweite Ableitung F''_R gilt

$$F''_R(e) = -\frac{2c}{h} < 0$$

für alle e , also hat $F_R(e)$ ein Maximum im Punkt $e = \frac{h}{2}$.

Da F_R nur einen Extremwert hat, ist dieser auch das globale Maximum. Aus der obigen Formel für die Nebenbedingung liest man $f = \frac{c}{2}$ ab, für den Flächeninhalt des Rechtecks

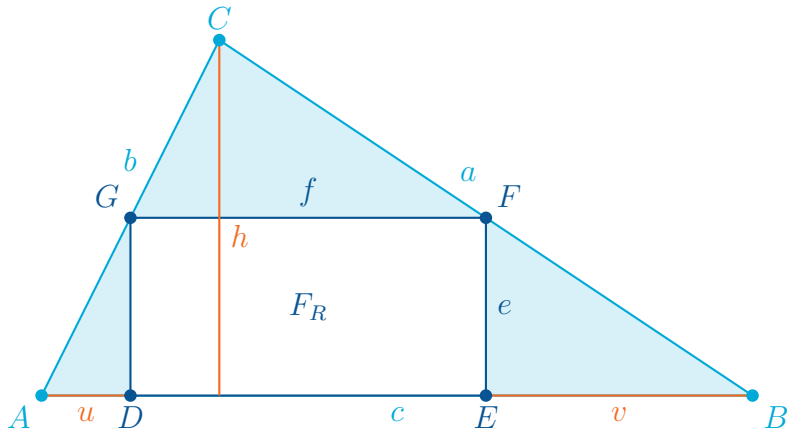
ergibt sich damit

$$F_R = F_R\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{ch}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{ch}{2}.$$

1

Das Rechteck hat also die halbe Fläche des Dreiecks, also $0,5 \text{ m}^2$.

Alternative Lösung (Punkte 1-4):



Die Fläche F_R des Rechtecks ergibt sich aus der Fläche F_D des Dreiecks $\triangle ABC$, wenn man die Flächen der 3 kleinen Dreiecke $\triangle ADG$, $\triangle EBF$ und $\triangle GFC$ abzieht:

1

$$\begin{aligned} F_R &= F_D - F_{ADG} - F_{EBF} - F_{GFC} \\ &= \frac{ch}{2} - \frac{ue}{2} - \frac{ve}{2} - \frac{f(h-e)}{2} \\ &= \frac{ch}{2} - \frac{(u+v)e}{2} - \frac{f(h-e)}{2} \\ &= \frac{ch}{2} - \frac{(c-f)e}{2} - \frac{f(h-e)}{2} \\ &= \frac{ch-ce+fe-fh+fe}{2} \\ &= ef + \frac{ch-ce-fh}{2} \end{aligned}$$

1

Wegen $F_R = ef$ muss nun

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{ch-ce-fh}{2} \\ \Rightarrow f &= \frac{ch-ce}{h} \end{aligned}$$

1

gelten. Auch so lässt sich F_R als Funktion $F_R(e)$ definieren, die lediglich von e abhängt:

$$F_R(e) := ef = c \cdot \left(e - \frac{e^2}{h}\right)$$

1